

14 Driehoeksmeting in rechthoekige driehoeken

CORRECTIESLEUTEL

Inhoud

- Goniometrische getallen van een scherpe hoek in een rechthoekige driehoek
- Fundamentele formules in de driehoeksmeting
- Het oplossen van vraagstukken met rechthoekige driehoeken
- Computationeel denken**
- Signaaloefeningen**
- Differentiatietraject**
- Studiewijzer**



WAT JE AL KUNT

- de stelling van Pythagoras gebruiken
- gelijkvormige driehoeken herkennen
- problemen oplossen met behulp van gelijkvormigheid
- rekenen met verhoudingen
- rekenen met hoeken in een driehoek



WAT JE LEERT IN DEZE MODULE

- goniometrische getallen van een scherpe hoek in een rechthoekige driehoek definiëren
- de fundamentele formules $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ en $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ gebruiken
- problemen oplossen in rechthoekige driehoeken door gebruik te maken van de goniometrische verhoudingen sinus, cosinus of tangens



IN DE KIJKER

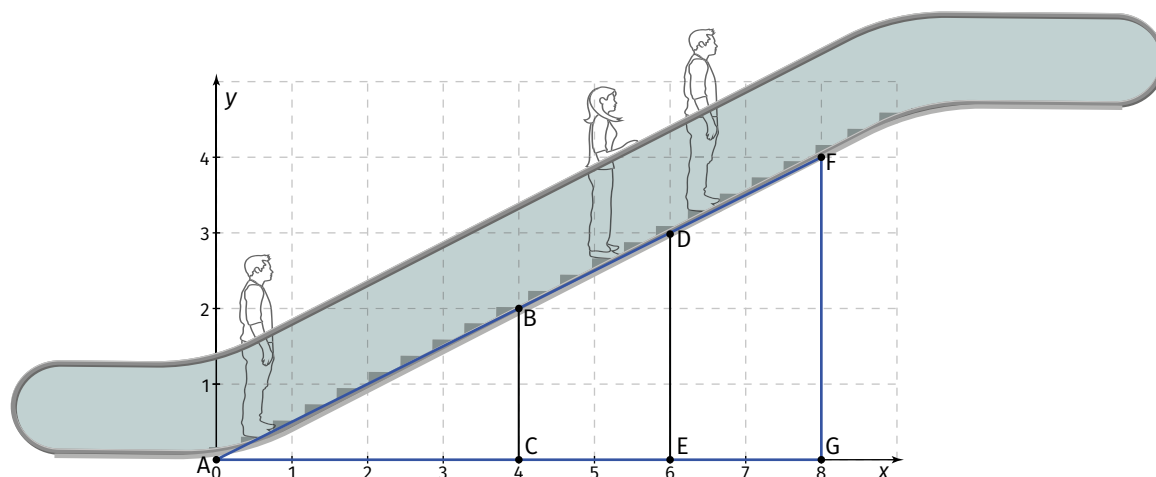
Je kunt een rekenmachine correct gebruiken bij het bepalen van een goniometrische verhouding of bij het bepalen van de scherpe hoek als de goniometrische verhouding gegeven is.



WISKUNDETAAL

- overstaande rechthoekszijde van een scherpe hoek
- aanliggende rechthoekszijde van een scherpe hoek
- schuine zijde
- sinus
- cosinus
- tangens
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

In een shoppingcentrum staat een roltrap.



a) Welke gelijkvormige driehoeken herken je in deze tekening?

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE \sim \triangle AFG$$

b) Waarom zijn deze driehoeken gelijkvormig?

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A} \quad (\text{gemeenschappelijke hoek}) \\ \hat{C} = \hat{E} = \hat{G} \quad (\text{rechte hoek}) \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle ABC \sim \triangle ADE \sim \triangle AFG$$

c) Vervolledig de tabel.

$ BC = 2$	$ AC = 4$	$ AB = \sqrt{20}$ $= 2\sqrt{5}$	$\frac{ BC }{ AC } = \frac{1}{2}$	$\frac{ BC }{ AB } = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{ AC }{ AB } = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
$ DE = 3$	$ AE = 6$	$ AD = \sqrt{45}$ $= 3\sqrt{5}$	$\frac{ DE }{ AE } = \frac{1}{2}$	$\frac{ DE }{ AD } = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{ AE }{ AD } = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
$ FG = 4$	$ AG = 8$	$ AF = \sqrt{80}$ $= 4\sqrt{5}$	$\frac{ FG }{ AG } = \frac{1}{2}$	$\frac{ FG }{ AF } = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{ AG }{ AF } = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

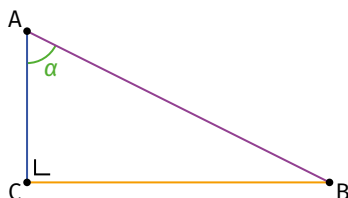
d) Wat stel je vast?

De verhouding van de lengten van de zijden blijft gelijk bij gelijkvormige driehoeken.

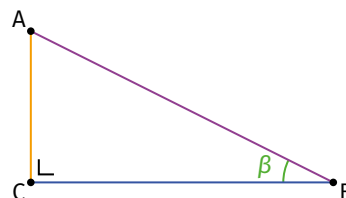
1 Goniometrische getallen van een scherpe hoek in een rechthoekige driehoek

1.1 Terminologie

Gegeven: Rechthoekige driehoek ABC met $\hat{C} = 90^\circ$.
De scherpe hoeken zijn α en β . Deze hoeken zijn complementair.



[BC] is de **overstaande rechthoekszijde** van α
[AC] is de **aanliggende rechthoekszijde** van α
[AB] is de **schuine zijde**



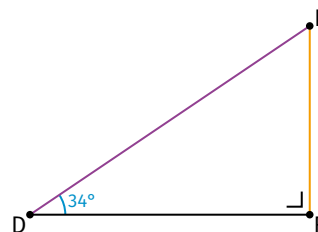
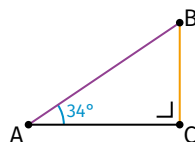
[AC] is de **overstaande rechthoekszijde** van β
[BC] is de **aanliggende rechthoekszijde** van β
[AB] is de **schuine zijde**

1.2 Goniometrische getallen

Alle rechthoekige driehoeken met een even grote scherpe hoek zijn gelijkvormig (HH). De verhouding van de lengtes van de overeenkomstige zijden is constant.

Vaststelling 1

$$\begin{aligned} \triangle ABC \sim \triangle DEF &\Rightarrow \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AB|}{|DE|} \\ &\Downarrow \\ \frac{|BC|}{|AB|} &= \frac{|EF|}{|DE|} \end{aligned}$$



De lengte van de **overstaande rechthoekszijde** van de hoek α ($= \hat{A} = \hat{D}$) ten opzichte van de lengte van de **schuine zijde** is een constante verhouding.

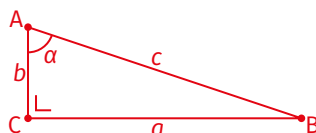
definitie

IN WOORDEN

De **sinus** van een scherpe hoek α in een **rechthoekige driehoek** is de verhouding van de lengte van de overstaande rechthoekszijde van die hoek tot de lengte van de schuine zijde.

IN SYMOLEN

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \text{of} \quad \sin \alpha = \frac{|BC|}{|AB|}$$



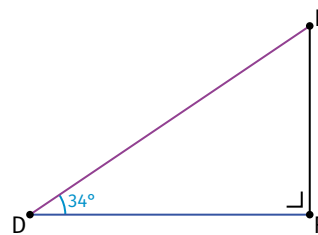
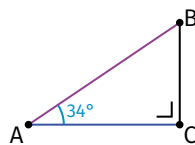
— Merk op —

De **sinus van een scherpe hoek** is groter dan 0 maar kleiner dan 1.

In een rechthoekige driehoek is de lengte van de schuine zijde namelijk altijd groter dan de lengte van een rechthoekszijde.

Vaststelling 2

$$\begin{aligned}\triangle ABC \sim \triangle DEF &\Rightarrow \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|AB|}{|DE|} \\ &\Downarrow \\ \frac{|AC|}{|AB|} &= \frac{|DF|}{|DE|}\end{aligned}$$



De lengte van de **aanliggende rechthoekszijde** van de hoek α ($= \hat{A} = \hat{D}$) ten opzichte van de lengte van de **schuine zijde** is een constante verhouding.

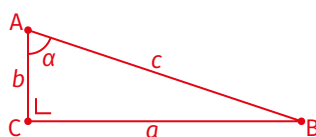
definitie

IN WOORDEN

De **cosinus** van een scherpe hoek α in een **rechthoekige driehoek** is de verhouding van de lengte van de aanliggende rechthoekszijde van die hoek tot de lengte van de schuine zijde.

IN SYMBOLEN

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \text{of} \quad \cos \alpha = \frac{|AC|}{|AB|}$$



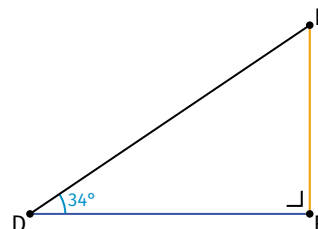
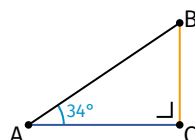
— Merk op —

De **cosinus van een scherpe hoek** is groter dan 0 maar kleiner dan 1.

In een rechthoekige driehoek is de lengte van de schuine zijde namelijk altijd groter dan de lengte van een rechthoekszijde.

Vaststelling 3

$$\begin{aligned}\triangle ABC \sim \triangle DEF &\Rightarrow \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|} \\ &\Downarrow \\ \frac{|BC|}{|AC|} &= \frac{|EF|}{|DF|}\end{aligned}$$



De lengte van de **overstaande rechthoekszijde** van de hoek α ($= \hat{A} = \hat{D}$) ten opzichte van de lengte van de **aanliggende rechthoekszijde** van diezelfde hoek is een constante verhouding.

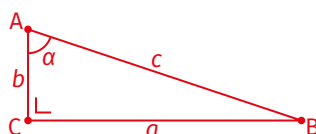
definitie

IN WOORDEN

De **tangens** van een scherpe hoek α in een **rechthoekige driehoek** is de verhouding van de lengte van de overstaande rechthoekszijde van die hoek tot de lengte van de aanliggende rechthoekszijde van die hoek.

IN SYMBOLEN

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \quad \text{of} \quad \tan \alpha = \frac{|BC|}{|AC|}$$



— Merk op —

De **tangens van een scherpe hoek** is een positief reëel getal.

1.3 Gebruik maken van een rekentoestel

Om de goniometrische getallen van een hoek te berekenen, maak je gebruik van een rekentoestel. Het antwoord is bijna altijd een decimale vorm. We spreken af dat we de decimale vorm afronden op 0,00001 nauwkeurig. (5 cijfers na de komma)

Voorbeelden

$$\sin 48^\circ \approx 0,74314$$

$$\sin 10^\circ \approx 0,17365$$

$$\cos 20^\circ \approx 0,93969$$

$$\cos 73^\circ \approx 0,29237$$

$$\tan 15^\circ \approx 0,26795$$

$$\tan 80^\circ \approx 5,67128$$

Als je een goniometrisch getal van een scherpe hoek kent, dan kun je met ICT bepalen hoe groot deze scherpe hoek is.

Voorbeelden

$$\sin \alpha = 0,42$$

$$\alpha = \sin^{-1}(0,42) \approx 24,83459^\circ$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) \approx 78,46304^\circ$$

$$\tan \alpha = \sqrt{11}$$

$$\alpha = \tan^{-1}(\sqrt{11}) \approx 73,22135^\circ$$



— Merk op —

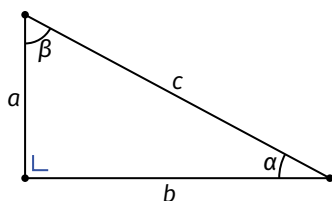
- Zorg dat de graden-modus (60-delig) actief is in de rekenmachine.
- Je kunt de decimale notatie voor de hoekgrootte in graden ook omzetten naar graden, minuten en seconden met behulp van de rekenmachine.
 $\cos \alpha = 0,6 \quad \alpha = \cos^{-1}(0,6) \approx 53,13010^\circ (= 53^\circ 07' 48'')$

1.4 Verband tussen de goniometrische getallen van complementaire scherpe hoeken

In een rechthoekige driehoek zijn de scherpe hoeken complementair.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \sin \beta$$



Voorbeelden

$$\sin 20^\circ = \cos 70^\circ$$

$$\cos 53^\circ = \sin 37^\circ$$





Verwerkingsopdrachten

1, 2, 3

1

Vul aan met de juiste verhouding.

a) $\sin \hat{L} = \frac{|KM|}{|KL|}$

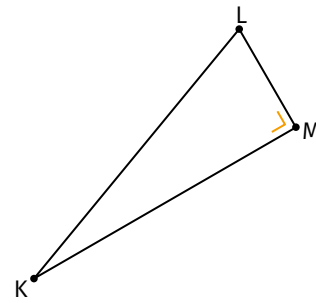
d) $\tan \hat{L} = \frac{|KM|}{|LM|}$

b) $\tan \hat{K} = \frac{|LM|}{|KM|}$

e) $\sin \hat{K} = \frac{|LM|}{|KL|}$

c) $\cos \hat{K} = \frac{|KM|}{|KL|}$

f) $\cos \hat{L} = \frac{|LM|}{|KL|}$



2

Reken uit met behulp van een rekenmachine.

a) $\tan 76^\circ \approx 4,01078$

b) $\cos 43^\circ \approx 0,73135$

c) $\sin 55^\circ \approx 0,81915$

3

Bepaal de grootte van de scherpe hoek waarvan het goniometrische getal gegeven is.

a) $\tan \alpha = 5,3$

$\alpha \approx 79,31509^\circ$
($\approx 79^\circ 18' 54''$)

b) $\cos \beta = 0,3$

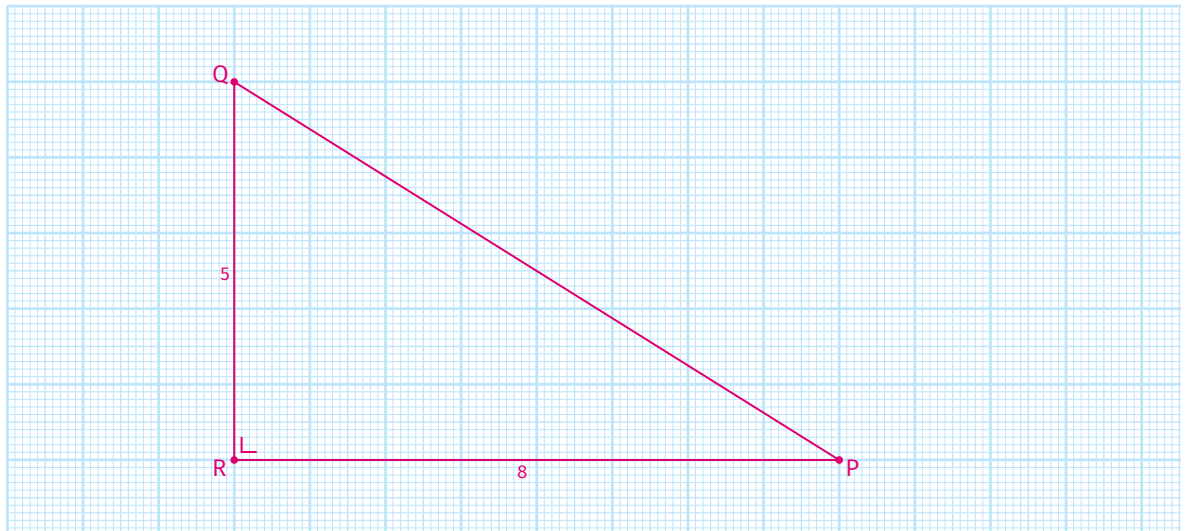
$\beta \approx 72,54240^\circ$
($\approx 72^\circ 32' 33''$)

c) $\sin \gamma = \frac{3}{7}$

$\gamma \approx 25,37693^\circ$
($\approx 25^\circ 22' 37''$)

4

Teken een rechthoekige driehoek PQR waarbij $\hat{R} = 90^\circ$ en $\tan \hat{P} = \frac{5}{8}$.



2 Fundamentele formules in de driehoeksmeting

We maken de volgende afspraken in verband met de notatie:

$$\sin^2 \alpha = (\sin \alpha)^2$$

$$\cos^2 \alpha = (\cos \alpha)^2$$

$$\tan^2 \alpha = (\tan \alpha)^2$$

2.1 Grondformule: verband tussen sinus en cosinus van een scherpe hoek

formule **GRONDFORMULE GONIOMETRIE**
 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

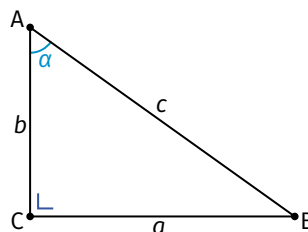
Verklaring

In een rechthoekige driehoek ABC met rechte hoek $\hat{C}$ geldt:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \text{ en } \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

We kunnen noteren dat:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \\ &= \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} \\ &= \frac{a^2 + b^2}{c^2} \quad (\text{stelling van Pythagoras}) \\ &= \frac{c^2}{c^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$



Je kunt de grondformule gebruiken bij het aantonen van identiteiten of bij het berekenen van $\sin \alpha$ als $\cos \alpha$ gegeven is (of omgekeerd).

Voorbeeld

Gegeven: $\sin \alpha = 0,8$ en α is een scherpe hoek

Gevraagd: $\cos \alpha$

Oplossing: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$0,8^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$0,64 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - 0,64$$

$$\cos^2 \alpha = 0,36$$

$$\cos \alpha = \sqrt{0,36}$$

$$\cos \alpha = 0,6$$

(de cosinus van een scherpe hoek ligt tussen 0 en 1, dus neem de positieve vierkantswortel)

2.2 Verband tussen sinus, cosinus en tangens van een scherpe hoek

formule $\left| \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \right.$

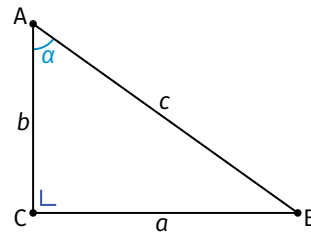
Verklaring

In een rechthoekige driehoek ABC met rechte hoek $\hat{C}$ geldt:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \text{ en } \cos \alpha = \frac{b}{c} \text{ en } \tan \alpha = \frac{a}{b}$$

We kunnen noteren dat:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} &= \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} \\ &= \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} \\ &= \frac{a}{b} \\ &= \tan \alpha \end{aligned}$$



Verwerkingsopdrachten



5

Gegeven: $\cos \alpha = 0,25$ en α is een scherpe hoek.
Bepaal $\sin \alpha$ zonder α te berekenen.

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \sin^2 \alpha + (0,25)^2 &= 1 \\ \sin^2 \alpha + 0,0625 &= 1 \\ \sin^2 \alpha &= 1 - 0,0625 \\ \sin^2 \alpha &= 0,9375 \\ \sin \alpha &= \sqrt{0,9375} \\ \sin \alpha &\approx 0,96825 \end{aligned}$$

6

Gegeven: $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ en α is een scherpe hoek.
Bepaal $\tan \alpha$ zonder α te berekenen.

$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \cos^2 \alpha &= 1 - \frac{1}{4} \\ \cos^2 \alpha &= \frac{3}{4} \\ \cos \alpha &= \sqrt{\frac{3}{4}} \\ \cos \alpha &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \tan \alpha &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ \tan \alpha &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \tan \alpha &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \tan \alpha &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$
---	--

3 Het oplossen van vraagstukken met rechthoekige driehoeken

3.1 Het oplossen van rechthoekige driehoeken

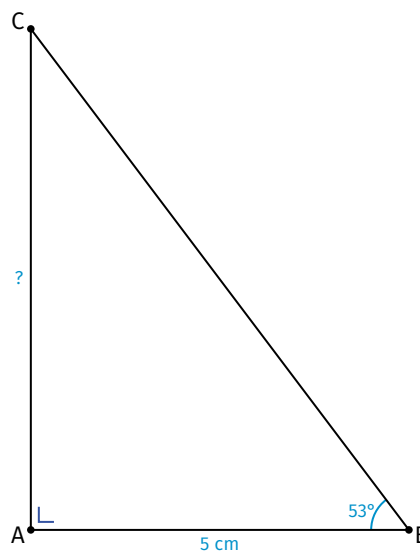
Met behulp van goniometrische getallen kun je ontbrekende elementen in een rechthoekige driehoek berekenen.

Voorbeeld 1

Bereken $|AC|$.

Probleem begrijpen

- Je moet de lengte van de **overstaande rechthoekszijde** berekenen van de gegeven scherpe hoek.
- Je kent de grootte van de scherpe hoek en de lengte van de **aanliggende rechthoekszijde** van die scherpe hoek.
- De **tangens** drukt de verhouding uit tussen de lengte van de overstaande rechthoekszijde van de gegeven hoek en de lengte van de aanliggende rechthoekszijde van de gegeven hoek.



Probleem oplossen

$$\begin{aligned}\tan \beta &= \frac{|AC|}{|AB|} \\ \tan 53^\circ &= \frac{|AC|}{5} \\ \tan 53^\circ &= \frac{|AC|}{5} \\ 1 &= 5 \\ |AC| &= 5 \cdot \tan 53^\circ \\ |AC| &\approx 6,63522\end{aligned}$$

Voorbeeld 2

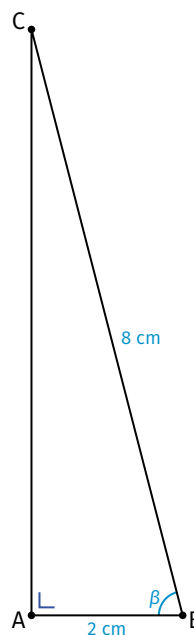
Bereken β .

Probleem begrijpen

- Je moet de hoekgrootte bepalen van $\hat{B}$.
- Je hebt de lengte van de **schuine zijde** en de lengte van de **aanliggende rechthoekszijde** van $\hat{B}$ gegeven.
- De **cosinus** drukt de verhouding uit tussen de lengte van de aanliggende rechthoekszijde van $\hat{B}$ en de lengte van de schuine zijde.

Probleem oplossen

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \frac{|AB|}{|BC|} \\ \cos \beta &= \frac{2}{8} \\ \cos \beta &= \frac{1}{4} \\ \beta &= \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \\ \beta &\approx 75,52249^\circ (= 75^\circ 31' 21'')\end{aligned}$$



3.2 Problemen oplossen in een context

Een steil pad maakt een hoek van 18° met de horizon. Het pad is 350 m lang. Bereken het hoogteverschil tussen het begin en het einde van het pad.

Probleem begrijpen

- Je plaatst de gegevens in een tekening.
- Je kent een scherpe hoek en de **schuine zijde** in de rechthoekige driehoek.
- Je moet de **overstaande rechthoekszijde** berekenen van de gegeven scherpe hoek.
- De **sinus** van de gegeven scherpe hoek drukt de verhouding uit tussen de overstaande rechthoekszijde en de schuine zijde.

Probleem oplossen

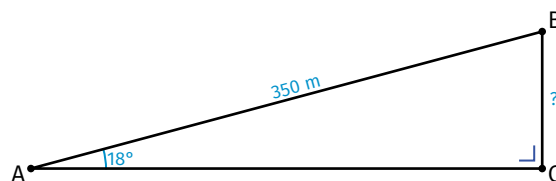
$$\sin \alpha = \frac{|BC|}{|AB|}$$

$$\sin 18^\circ = \frac{|BC|}{350}$$

$$\frac{\sin 18^\circ}{1} = \frac{|BC|}{350}$$

$$|BC| = 350 \cdot \sin 18^\circ$$

$$|BC| \approx 108,15595$$



Antwoord: Het hoogteverschil tussen het begin en het einde van het pad bedraagt iets meer dan 108 meter.

3.3 Problemen oplossen in de ruimte

Bereken de grootte van de hoek gevormd door de **ruimtediagonaal** [BH] en de **ribbe** [BF].

Probleem begrijpen

- $\widehat{FBH}$ is een scherpe hoek in de rechthoekige driehoek FBH.
- We kennen de lengte van de **aanliggende rechthoekszijde** van de hoek $\widehat{FBH}$.
- We berekenen in een andere rechthoekige driehoek met de stelling van Pythagoras de ontbrekende lengte van **overstaande rechthoekszijde** [FH].
- De **tangens** van de scherpe hoek $\widehat{FBH}$ drukt de verhouding uit tussen de overstaande rechthoekszijde en de aanliggende rechthoekszijde.

Probleem oplossen

Stap 1: |FH| berekenen (bijvoorbeeld via de rechthoekige driehoek HEF)

$$|FH|^2 = |HE|^2 + |EF|^2$$

$$|FH|^2 = 5^2 + 2^2$$

$$|FH|^2 = 25 + 4$$

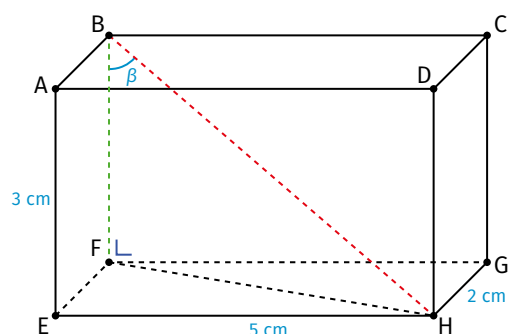
$$|FH| = \sqrt{29}$$

Stap 2: de hoek zoeken met behulp van de tangens

$$\tan \beta = \frac{\sqrt{29}}{3}$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{29}}{3}\right)$$

$$\beta \approx 60,7843^\circ (= 60^\circ 52' 42'')$$



Antwoord: De gevraagde hoek is ongeveer $60,87843^\circ$.



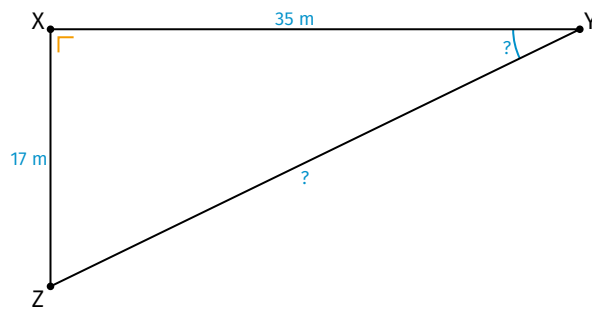
Verwerkingsopdrachten



5, 6

7

Bepaal $\hat{Y}$ en $|YZ|$. Werk op 1 cm nauwkeurig.



$$\begin{aligned} \bullet \tan \hat{Y} &= \frac{17}{35} \\ \hat{Y} &\approx 25,90651^\circ (\approx 25^\circ 54' 23'') \\ \bullet \sin(25,90651^\circ) &= \frac{17}{|YZ|} \\ |YZ| &= \frac{17}{\sin(25,90651^\circ)} \\ |YZ| &\approx 38,91 \end{aligned}$$

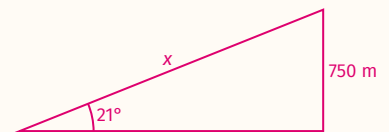
Antwoord: De lengte van $[YZ]$ is ongeveer 3891 cm.

8

De flank van een berg maakt een hoek van 21° met de horizon. Het hoogteverschil tussen de voet en de top van de berg bedraagt 750 m. Welke afstand legt een skiër minimaal af als hij daalt van de top tot aan de voet van de berg? Rond af op 1 km nauwkeurig.

$$\begin{aligned} \sin 21^\circ &= \frac{750}{x} \\ x &= \frac{750}{\sin 21^\circ} \\ x &\approx 2092,82 \end{aligned}$$

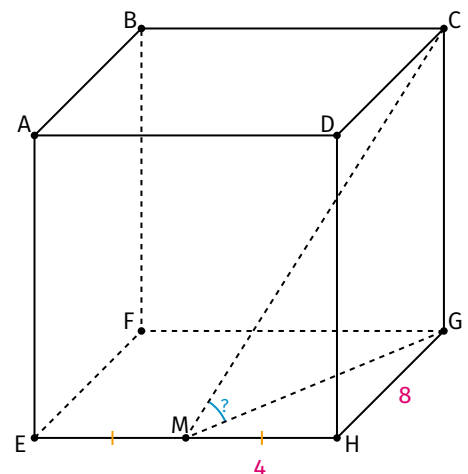
Antwoord: De minimale afstand die de skiër aflegt is ongeveer 2 km.



9

In een kubus met ribbe 8 cm is M het midden van $[EH]$. Bereken $\hat{GMC}$.

$$\begin{aligned} \bullet \text{ in } \triangle MGH: \\ |MG|^2 &= |MH|^2 + |HG|^2 \\ |MG|^2 &= 4^2 + 8^2 \\ |MG| &= \sqrt{80} \\ |MG| &= 4\sqrt{5} \\ \bullet \text{ in } \triangle MCG: \\ \tan \hat{M} &= \frac{8^2}{4\sqrt{5}} \\ \hat{M} &\approx 41,81031^\circ \\ \hat{M} &\approx 41^\circ 48' 37'' \end{aligned}$$





Computationeel denken

Operatoren en functies

Regelmatig maakt Wiebe gebruik van de app *Meten* op zijn smartphone. Met behulp van ingebouwde sensoren kan hij zijn smartphone gebruiken om te kijken of iets waterpas staat. Met behulp van de LIDAR-scanner kan hij via Augmented Reality de lengte van bijvoorbeeld zijn voordeur meten.

Bij deze toepassingen wordt o.a. gebruik gemaakt van **driehoeksmeting**. In de code zal men ingebouwde functies gebruiken.

Hieronder zie je wat blokcode uit Scratch waarbij men gebruik maakt van functies.



Scratch



Wat gebeurt er als je bovenstaande code in Scratch uitvoert?

De sprite geeft telkens de sinus, cosinus en tangens van de ingegeven hoek weer met een interval van 2 seconden.

Bij het tekstueel programmeren in programmeertalen zoals Python of Swift krijg je een code zoals deze:



```

1 import math
2 hoek = int(input("Voer de grootte van de scherpe hoek β
  in. (zonder gradensymbool)"))
3 hoekInRad = math.radians(hoek)
4 print("sin ", hoek, " ≈ ", round(math.sin(hoekInRad),5))
5 print("cos ", hoek, " ≈ ", round(math.cos(hoekInRad),5))
6 print("tan ", hoek, " ≈ ", round(math.tan(hoekInRad),5))

```

Begrijp je de code?

a) Waarom wordt de `round(..., 5)`-functie gebruikt bij de invoer?

Afronden tot op 5 cijfers na de komma.

b) Wat moet je wijzigen in de code als je maar wilt afronden op 3 cijfers?

De '5' in lijn 4,5 en 6 vervangen door '3'.

c) Hoe zou je de code kunnen aanpassen zodat er een foutmelding wordt weergegeven als de gebruiker een hoekgrootte ingeeft die niet overeenstemt met die van een scherpe hoek? Noteer hieronder de code die je zou toevoegen.

3 if hoek >= 90:

4 print("Dit is geen scherpe hoek.")

Zonder dat we er echt bij stilgestaan hebben, werkte je al met een aantal standaard ingebouwde functies in Python. Hiervoor moet je geen bibliotheek (zoals **math** of **random**) importeren! Noteer naast elke functie wat ze precies doen.

<code>print()</code>	<u>Tekst op het scherm toevoegen</u>
<code>input()</code>	<u>De gebruiker iets laten invullen</u>
<code>int()</code>	<u>Gehele getallen</u>

Wiskundig zijn er nog een aantal interessante functies die standaard beschikbaar zijn. We geven nog een voorbeeld:



```
1  grondtal = 5
2  exponent = 3
3  macht = pow(grondtal,exponent)
4  print("Wanneer je ",grondtal," tot de macht ", exponent, " verheft, verkrijg je ",macht)
```

Begrijp je de code?

a) Waarom wordt de `pow()`-functie gebruikt bij de invoer?

De machtsverheffing.

b) Zoek op en noteer hieronder hoe je met Python de vierkantswortel van een getal kunt berekenen.

```
1  import math
2  getal = int(input("Voer een natuurlijk getal in:"))
3  print("Vierkantswortel =", math.sqrt(getal))
```

We koppelen de geziene codes nu even aan het onderdeel van driehoeksmeting in rechthoekige driehoeken. Bekijk aandachtig deze code:



```
1  schuineZijde = float(input("Voer de lengte van de schuine zijde in. "))
2  overstaandeRz = float(input("Voer de lengte van de overstaande rechthoekszijde van α in. "))
3  aanliggendeRz = float(input("Voer de lengte van de aanliggende rechthoekszijde van α in. "))
4  if pow(schuineZijde,2) == pow(overstaandeRz,2) + pow(aanliggendeRz,2):
5      sinus = overstaandeRz/schuineZijde
6      cosinus = aanliggendeRz/schuineZijde
7      tangens = overstaandeRz/aanliggendeRz
8      print("sin α ≈", round(sinus,5))
9      print("cos α ≈", round(cosinus,5))
10     print("tan α ≈", round(tangens,5))
11 else:
12     print("Je voerde geen zijden in van een rechthoekige driehoek.")
```

Begrijp je de code?

a) Wat doet deze code?

Deze berekent de sinus, cosinus en tangens van een hoek in een rechthoekige driehoek aan de hand van de lengten van de zijden van de driehoek.

b) Waarom werd er een IF-structuur gebruikt?

Om er zeker van te zijn dat de gebruiker de zijden van een rechthoekige driehoek ingeeft. De code controleert dat a.d.h.v. de stelling van Pythagoras.



Nu je deze nieuwe concepten begrijpt kun je verder aan de slag. Download via POLPO de oefeningen en het traject om je te verdiepen in functies.



Signaaloefeningen

1

Bepaal de goniometrische getallen van de hoeken α en β met behulp van de tekening.

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

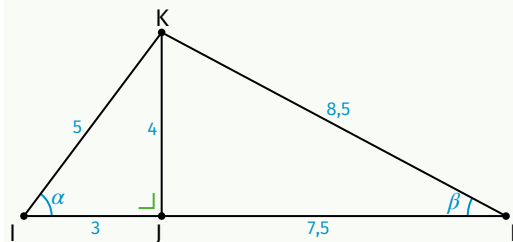
$$\cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{4}{3}$$

$$\sin \beta = \frac{4}{8,5} = \frac{8}{17}$$

$$\cos \beta = \frac{7,5}{8,5} = \frac{15}{17}$$

$$\tan \beta = \frac{4}{7,5} = \frac{8}{15}$$



>>> Verder oefenen: D1 t.e.m. D20

2

Bereken met behulp van een rekenmachine.

a) $\sin 38^\circ \approx 0,61566$

b) $\tan 85^\circ \approx 11,43005$

c) $\cos 24^\circ \approx 0,91355$

>>> Verder oefenen: D1 t.e.m. D20

3

Bepaal de grootte van de scherpe hoek zodat ...

a) $\tan \alpha = \frac{3}{11}$

$$\alpha \approx 15,25512^\circ$$

$$(\approx 15^\circ 15' 18'')$$

b) $\sin \beta = 0,15$

$$\beta \approx 8,62693^\circ$$

$$(\approx 8^\circ 37' 37'')$$

c) $\cos \gamma = 0,45$

$$\gamma \approx 63,25632^\circ$$

$$(\approx 63^\circ 15' 23'')$$

>>> Verder oefenen: D1 t.e.m. D20

4

Gegeven: α is een scherpe hoek met $\cos \alpha = \frac{12}{13}$

Bereken $\tan \alpha$ zonder α te berekenen.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{25}{169}}$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{13}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}}$$

$$\tan \alpha = \frac{5}{13} \cdot \frac{13}{12}$$

$$\tan \alpha = \frac{5}{12}$$

>>> Verder oefenen: D21 t.e.m. D29

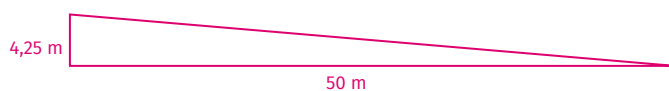
5

In een zwembad van 50 m lang daalt de vloer van 1 m tot 5,25 m diep. Bepaal de hellingshoek van de vloer in dit zwembad.

$$\tan \alpha = \frac{4,25}{50}$$

$$\alpha \approx 4,85846^\circ$$

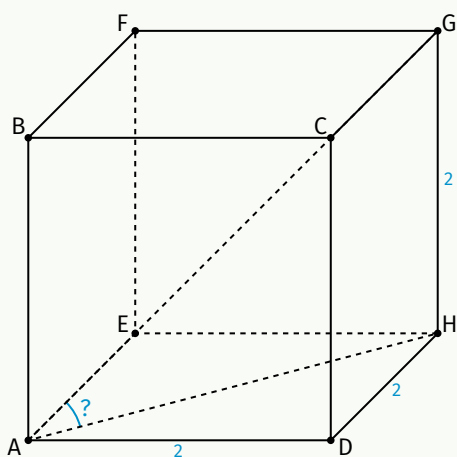
Antwoord: De hellingshoek is ongeveer $4,9^\circ$.



>>> Verder oefenen: D30 t.e.m. D54

6

Bereken de aangeduide hoek $\widehat{GAH}$.



- In $\triangle AHD$:
 $|AH|^2 = |AD|^2 + |DH|^2$
 $|AH|^2 = 2^2 + 2^2$
 $|AH| = \sqrt{8}$
 $|AH| = 2\sqrt{2}$
- In $\triangle AGH$:
 $\tan \widehat{GAH} = \frac{2^1}{2_1\sqrt{2}}$
 $\widehat{GAH} \approx 35,26439^\circ$

>>> Verder oefenen: D30 t.e.m. D54

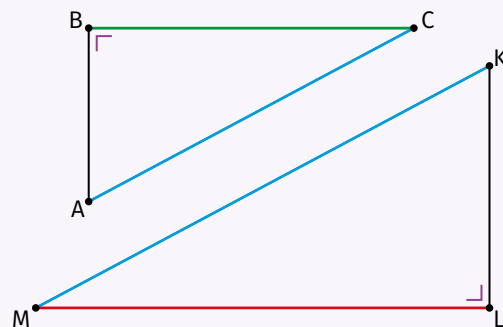


Differentiatietraject

module p. 16

1

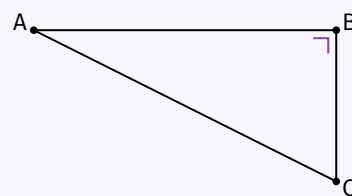
- Kleur in de rechthoekige driehoek ABC de schuine zijde in het blauw.
- Kleur in de rechthoekige driehoek ABC de overstaande rechthoekszijde van $\hat{A}$ in het groen.
- Kleur in de rechthoekige driehoek KLM de schuine zijde in het blauw.
- Kleur in de rechthoekige driehoek KLM de aanliggende rechthoekszijde van $\hat{M}$ in het rood.



2

Is de verhouding gelijk aan de sinus, de cosinus of de tangens van de gegeven hoek?
Vul aan met sin, cos of tan.

- | | |
|--|--|
| a) $\frac{ AB }{ AC } = \dots \hat{A}$ | d) $\frac{ AB }{ AC } = \dots \hat{C}$ |
| b) $\frac{ AB }{ BC } = \dots \hat{C}$ | e) $\frac{ BC }{ AB } = \dots \hat{A}$ |
| c) $\frac{ BC }{ AC } = \dots \hat{A}$ | f) $\frac{ BC }{ AC } = \dots \hat{C}$ |

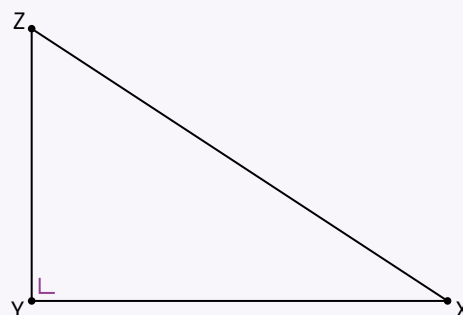


- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $\frac{ AB }{ AC } = \cos \hat{A}$ | d) $\frac{ AB }{ AC } = \sin \hat{C}$ |
| b) $\frac{ AB }{ BC } = \tan \hat{C}$ | e) $\frac{ BC }{ AB } = \tan \hat{A}$ |
| c) $\frac{ BC }{ AC } = \sin \hat{A}$ | f) $\frac{ BC }{ AC } = \cos \hat{C}$ |

3

Vul aan met de juiste verhouding.

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| a) $\sin \hat{X} = \dots$ | d) $\sin \hat{Z} = \dots$ |
| b) $\tan \hat{Z} = \dots$ | e) $\cos \hat{Z} = \dots$ |
| c) $\cos \hat{X} = \dots$ | f) $\tan \hat{X} = \dots$ |



- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $\sin \hat{X} = \frac{ YZ }{ XZ }$ | d) $\sin \hat{Z} = \frac{ XY }{ XZ }$ |
| b) $\tan \hat{Z} = \frac{ XY }{ YZ }$ | e) $\cos \hat{Z} = \frac{ YZ }{ XZ }$ |
| c) $\cos \hat{X} = \frac{ XY }{ XZ }$ | f) $\tan \hat{X} = \frac{ YZ }{ XY }$ |

4

Bepaal de goniometrische getallen door gebruik te maken van de figuur.

a) $\sin \hat{A} = \dots$

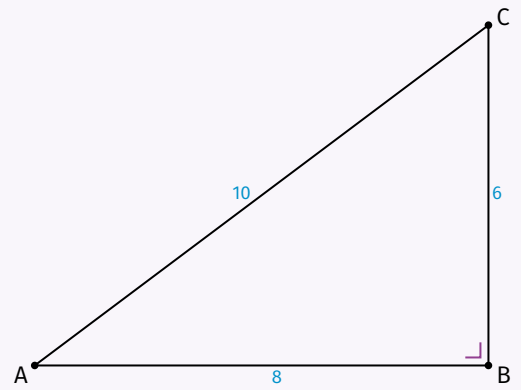
d) $\sin \hat{C} = \dots$

b) $\cos \hat{A} = \dots$

e) $\cos \hat{C} = \dots$

c) $\tan \hat{A} = \dots$

f) $\tan \hat{C} = \dots$



a) $\sin \hat{A} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

d) $\sin \hat{C} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

b) $\cos \hat{A} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

e) $\cos \hat{C} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

c) $\tan \hat{A} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

f) $\tan \hat{C} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

5

Is het resultaat een hoekgrootte of een reëel getal?

a) $\cos 17^\circ$

d) $\sin 55^\circ 13' 52''$

b) $\tan^{-1}(\sqrt{20})$

e) $\tan 67^\circ$

c) $\cos^{-1}(0,73491)$

f) $\sin^{-1}\left(\frac{4}{17}\right)$

a) reëel getal

d) reëel getal

b) hoekgrootte

e) reëel getal

c) hoekgrootte

f) hoekgrootte

6

Kleur de vakjes die bij elkaar horen in eenzelfde kleur.

$\sin 45^\circ$	0,57735...	$\cos 60^\circ$	0,78801...
$\cos 75^\circ$	0,25881...	$\tan 30^\circ$	$\frac{1}{2}$
0,70710...	$\tan 23^\circ$	0,42447...	$\sin 52^\circ$

7

Bereken met een rekenmachine.

a) $\sin 68^\circ$

d) $\tan 44^\circ 12' 38''$

g) $\sin 35^\circ + \cos 48^\circ$

b) $\tan 8,5^\circ$

e) $\cos 9^\circ 5' 19''$

h) $2 \cdot \tan 33^\circ + 5 \cdot \sin 12^\circ$

c) $\cos 75^\circ$

f) $\sin 22^\circ 30'$

i) $2 \cdot \sin 15^\circ + 5 \cdot \cos 47^\circ$

a) $\sin 68^\circ \approx 0,92718$

b) $\tan 8,5^\circ \approx 0,14945$

c) $\cos 75^\circ \approx 0,25882$

d) $\tan 44^\circ 12' 38'' \approx 0,97282$

e) $\cos 9^\circ 5' 19'' \approx 0,98745$

f) $\sin 22^\circ 30' \approx 0,38268$

g) $\sin 35^\circ + \cos 48^\circ \approx 1,24271$

h) $2 \tan 33^\circ + 5 \sin 12^\circ \approx 2,33837$

i) $2 \sin 15^\circ + 5 \cos 47^\circ \approx 3,92763$



8

Bereken met een rekenmachine.

a) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c) $\tan^{-1}(1)$

e) $\cos^{-1}(0,36)$

b) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

d) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

f) $\sin^{-1}(0,2)$

a) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 60^\circ$

d) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 30^\circ$

b) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$

e) $\cos^{-1}(0,36) \approx 68,89980^\circ$

c) $\tan^{-1}(1) = 45^\circ$

f) $\sin^{-1}(0,2) \approx 11,53696^\circ$



9

Welke getallen zijn gelijk aan elkaar? Kleur ze in eenzelfde kleur.

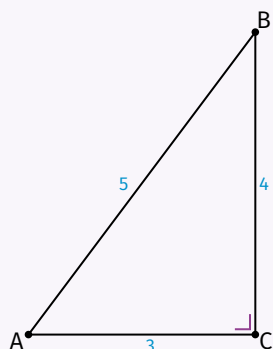
$\sin 70^\circ$	$\cos 80^\circ$	$\cos 67^\circ$	$\sin 57^\circ$	$\cos 33^\circ$
$\cos 45^\circ$	$\sin 23^\circ$	$\cos 20^\circ$	$\sin 45^\circ$	$\sin 10^\circ$



10

Gegeven: $\triangle ABC$ met $\hat{C} = 90^\circ$.
Bereken telkens $\hat{A}$ en $\hat{B}$.

a)



b)



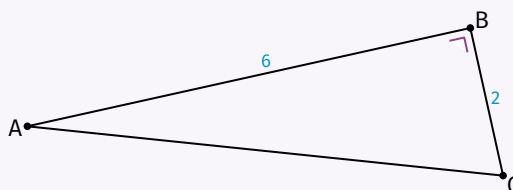
a) • $\sin \hat{A} = \frac{4}{5}$
 $\hat{A} = \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 53,13010^\circ$
 • $\sin \hat{B} = \frac{3}{5}$
 $\hat{B} = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 36,86990^\circ$

b) • $\tan \hat{A} = \frac{100}{5}$
 $\hat{A} = \tan^{-1}(20) \approx 87,13759^\circ$
 • $\tan \hat{B} = \frac{5}{100}$
 $\hat{B} = \tan^{-1}\left(\frac{5}{100}\right) \approx 2,86241^\circ$



11

Bepaal de exacte waarde van de sinus, cosinus en tangens van de scherpe hoek $\hat{A}$.



1) $|AC|$ in $\triangle ABC$ m.b.v. Pythagoras

$$|AC|^2 = 6^2 + 2^2$$

$$|AC|^2 = 36 + 4$$

$$|AC|^2 = 40$$

$$|AC| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

2) $\sin \hat{A} = \frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

$$\cos \hat{A} = \frac{6}{2\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

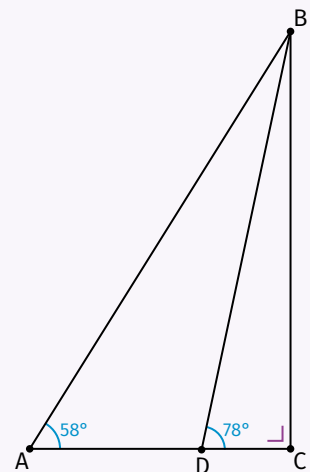
$$\tan \hat{A} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$



12

Vul aan met $<$ of $>$. Maak gebruik van de tekening om te redeneren.

- a) $\sin 58^\circ \dots \sin 78^\circ$
- b) $\cos 58^\circ \dots \cos 78^\circ$
- c) $\tan 58^\circ \dots \tan 78^\circ$

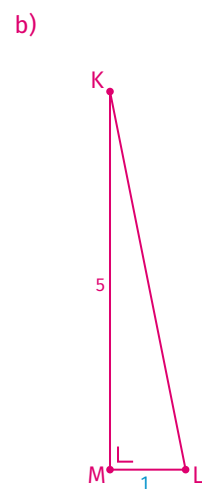
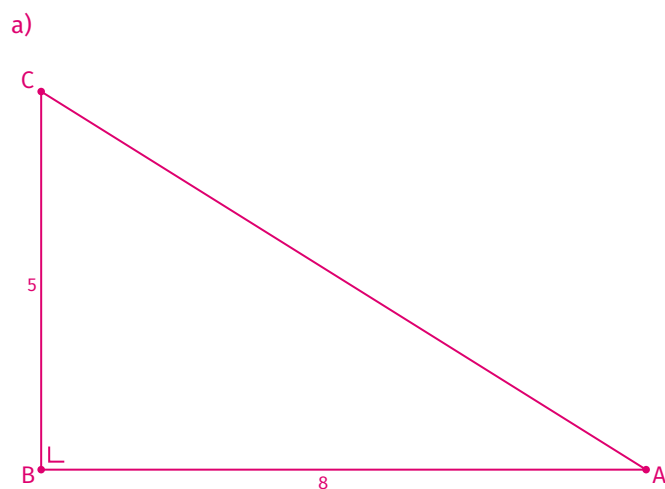


- a) $\sin 58^\circ < \sin 78^\circ$
- b) $\cos 58^\circ > \cos 78^\circ$
- c) $\tan 58^\circ < \tan 78^\circ$



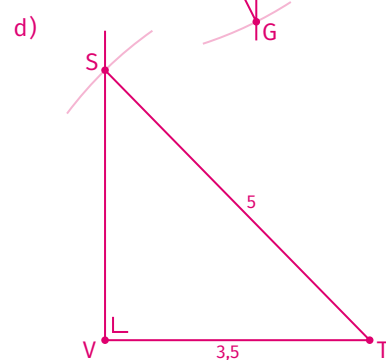
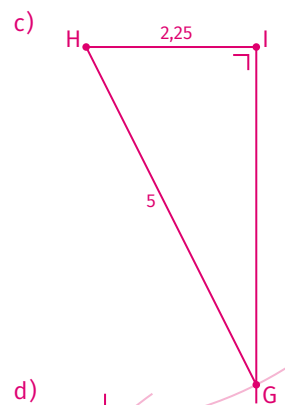
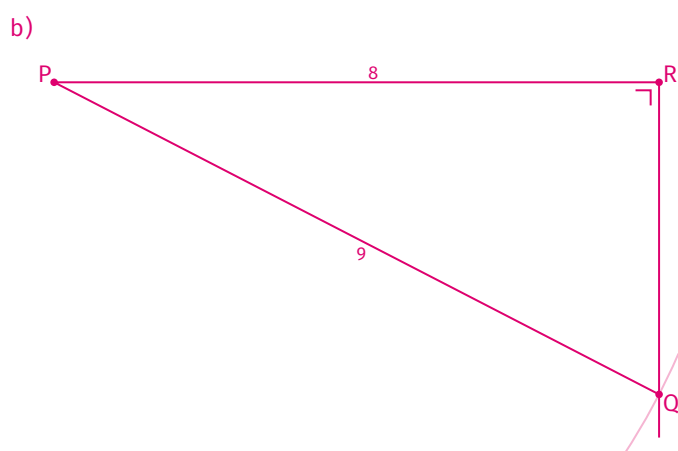
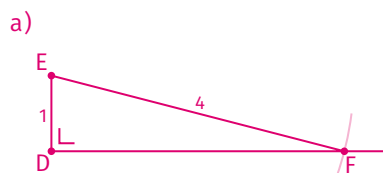
13

- a) Teken een rechthoekige driehoek ABC met $\hat{B} = 90^\circ$ en $\tan \hat{C} = \frac{8}{5}$.
- b) Teken een rechthoekige driehoek KLM met $\hat{M} = 90^\circ$ en $\tan \hat{K} = 0,2$.



14

- Teken een rechthoekige driehoek DEF met $\hat{D} = 90^\circ$ en $\sin \hat{F} = \frac{1}{4}$.
- Teken een rechthoekige driehoek PQR met $\hat{R} = 90^\circ$ en $\cos \hat{P} = \frac{8}{9}$.
- Teken een rechthoekige driehoek GHI met $\hat{I} = 90^\circ$ en $\cos \hat{H} = 0,45$.
- Teken een rechthoekige driehoek STV met $\hat{V} = 90^\circ$ en $\sin \hat{S} = 0,7$.



In deze onderzoeksoopdrachten ga je op zoek naar de exacte waarde van enkele goniometrische getallen van een scherpe hoek in een rechthoekige driehoek.

Onderzoeksoopdracht 1

- Teken een rechthoekige gelijkbenige driehoek ABC met rechthoekszijde 1 en $\hat{B} = 90^\circ$.
- Hoe groot is $\hat{A}$ en hoe groot is $\hat{C}$?
- Bereken $|AC|$.
- Bereken de goniometrische getallen $\sin \hat{A}$, $\cos \hat{A}$ en $\tan \hat{A}$.

Onderzoeksoopdracht 2

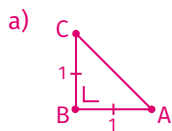
- Teken een gelijkzijdige driehoek ABC met zijde 1.
- Teken de hoogtelijn uit $\hat{A}$. De zijde [BC] en de hoogtelijn uit $\hat{A}$ snijden elkaar in het punt M.
- Bereken $|AM|$ en $|BM|$.
- Beschouw $\triangle ABM$. Hoe groot zijn $\hat{MAB} = \hat{A}_1$ en $\hat{B}$?
- Bereken de goniometrische getallen $\sin \hat{A}_1$, $\cos \hat{A}_1$ en $\tan \hat{A}_1$.
- Bereken de goniometrische getallen $\sin \hat{B}$, $\cos \hat{B}$ en $\tan \hat{B}$.

Toepassing

- Maak een tabel voor de exacte waarden van de goniometrische getallen van deze bijzondere hoeken uit de onderzoeksoopdrachten.
- Bereken exact (zonder rekenmachine).

• $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ$	• $\tan 30^\circ \cdot \tan 60^\circ$	• $\tan 45^\circ - \cos 60^\circ$
• $\sin 60^\circ \cdot \sin 30^\circ$	• $\frac{\cos 60^\circ}{\sin 45^\circ}$	• $\sin 60^\circ \cdot \tan 30^\circ$

Onderzoeksoopdracht 1



b) $\hat{A} = 45^\circ$ en $\hat{C} = 45^\circ$

c) $|AC|$ via Pythagoras

$$|AC|^2 = 1^2 + 1^2$$

$$|AC|^2 = 1 + 1$$

$$|AC|^2 = 2$$

$$|AC| = \sqrt{2}$$

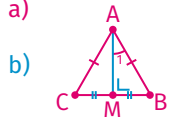
d) $\sin \hat{A} = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos \hat{A} = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \hat{A} = \tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

Onderzoeksopdracht 2

a)



b)

c) • $|BM| = \frac{1}{2} |BC|$ (in een gelijkzijdige Δ is de hoogtelijn ook de zwaartelijn)

$$|BM| = \frac{1}{2} \cdot 1$$

$$|BM| = \frac{1}{2}$$

- $|AM|$ m.b.v. Pythagoras

$$|AM|^2 + |BM|^2 = |AB|^2$$

$$|AM|^2 = |AB|^2 - |BM|^2$$

$$|AM|^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$|AM|^2 = \frac{3}{4}$$

$$|AM| = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$|AM| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- d) • ΔABC is gelijkzijdig

$$\Downarrow$$

$$\hat{A} = 60^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{A}_1 = 30^\circ$$

(in een gelijkzijdige Δ is de hoogtelijn ook de bissectrice)

• $\hat{B} = 180^\circ - \hat{M} - \hat{A}_1$
 $= 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ$
 $= 60^\circ$

e) $\sin \hat{A}_1 = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$\cos \hat{A}_1 = \cos 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \hat{A}_1 = \tan 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

f) $\sin \hat{B} = \sin 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos \hat{B} = \cos 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\tan \hat{B} = \tan 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}$$

Toepassing

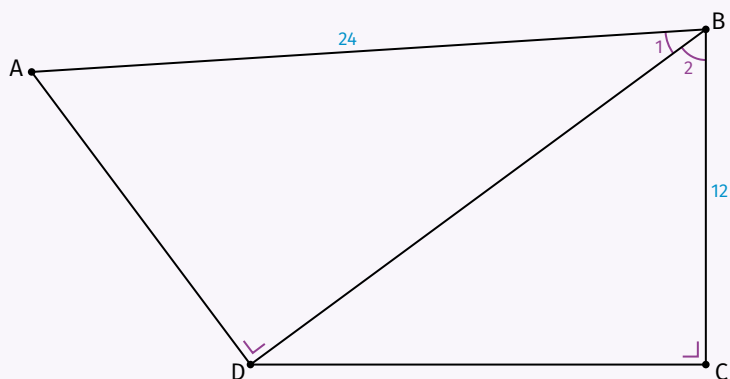
a)	α	30°	45°	60°
	$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
	$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

- b)
- $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
 - $\sin 60^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$
 - $\tan 30^\circ \cdot \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{3} = 1$
 - $\frac{\cos 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 - $\tan 45^\circ - \cos 60^\circ = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
 - $\sin 60^\circ \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

16

Gegeven: $\cos \widehat{B}_1 = \frac{5}{6}$

Gevraagd: $\sin \widehat{B}_1, \sin \widehat{B}_2$ en $\cos \widehat{B}_2$



$$\begin{aligned} \bullet \cos \widehat{B}_1 &= \frac{5}{6} \\ \frac{|BD|}{24} &= \frac{5}{6} \\ |BD| &= \frac{5 \cdot 24}{6} \\ |BD| &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \sin \widehat{B}_1 &= \frac{\sqrt{176}}{24} = \frac{4\sqrt{11}}{24} = \frac{\sqrt{11}}{6} \\ \sin \widehat{B}_2 &= \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \\ \cos \widehat{B}_2 &= \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet |AD|^2 &= |AB|^2 - |BD|^2 \\ |AD|^2 &= 24^2 - 20^2 \\ |AD|^2 &= 176 \\ |AD| &= \sqrt{176} \\ |AD| &= 4\sqrt{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet |DC|^2 &= |BD|^2 - |BC|^2 \\ |DC|^2 &= 20^2 - 12^2 \\ |DC|^2 &= 256 \\ |DC| &= 16 \end{aligned}$$

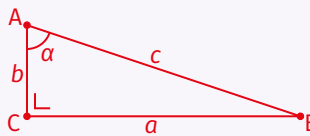
definitie

IN WOORDEN

De **cotangens** van een scherpe hoek α in een **rechthoekige driehoek** is de verhouding van de lengte van de aanliggende rechthoekszijde van die hoek tot de lengte van de overstaande rechthoekszijde van die hoek.

IN SYMBOLEN

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} \quad \text{of} \quad \cot \alpha = \frac{|AC|}{|BC|}$$



- a) Verklaar dat $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$.
- b) Bepaal $\cot \alpha$ als je weet dat $\tan \alpha = \frac{3}{2}$ en α een scherpe hoek is.
- c) Op de rekenmachine vind je geen knop om de cotangens te berekenen. Bereken met een tussenstap $\cot 40^\circ$.
- d) Bepaal met een tussenstap de scherpe hoek α waarvoor $\cot \alpha = 0,1$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{\tan \alpha} &= \frac{1}{\frac{b}{a}} \\ &= 1 \cdot \frac{a}{b} \\ &= \frac{a}{b} \\ &= \cot \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cot \alpha &= \frac{1}{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{c) Je berekent } \frac{1}{\tan 40^\circ} \approx 1,9175 \quad (\text{want dit is } \cot 40^\circ)$$

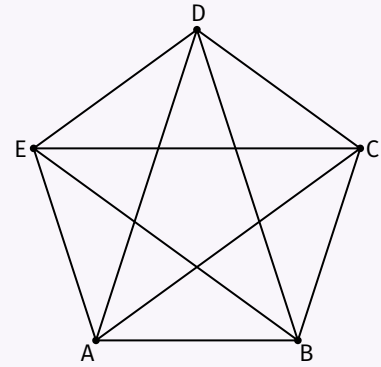
$$\begin{aligned} \text{d) } \cot \alpha &= \frac{1}{10} \\ \frac{1}{\tan \alpha} &= \frac{1}{10} \\ \tan \alpha &= 10 \\ \alpha &= \tan^{-1}(10) \approx 84,28941^\circ \end{aligned}$$



In een regelmatige vijfhoek met zijde 1 is de lengte van iedere diagonaal $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

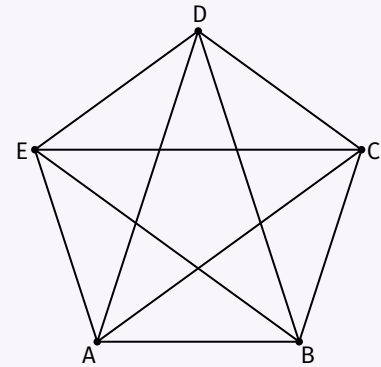
Onderzoeksopdracht 1

- Hoe groot is $\widehat{ADB}$?
- Teken de hoogtelijn uit D op de zijde [AB], noem het snijpunt R.
- Hoe groot is $\widehat{RDB}$?
- Hoe groot is $\widehat{DBR}$?
- Toon aan dat: $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72^\circ$.



Onderzoeksopdracht 2

- Hoe groot is $\widehat{EDC}$?
- Teken de hoogtelijn uit D op de zijde [EC], noem het snijpunt P.
- Hoe groot is $\widehat{PDC}$?
- Hoe groot is $\widehat{DCP}$?
- Toon aan dat: $\sin 54^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \cos 36^\circ$.
- Toon aan dat: $\cos 54^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = \sin 36^\circ$.



Onderzoeksopdracht 1

- a) $\widehat{ADB} = ?$

De som van de hoeken van een n -hoek $= (n-2) \cdot 180^\circ$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$)

De hoekgrootte van een hoek van een regelmatige n -hoek:

$$\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\})$$

De hoekgrootte van een hoek van een regelmatige 5-hoek:

$$\frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{CBA} = \widehat{DCB} = \widehat{EDC} = \widehat{AED} = 108^\circ$$

In gelijkbenige driehoek ADE:

- som van de hoeken van een driehoek:

$$\widehat{AED} + \widehat{EDA} + \widehat{DAE} = 180^\circ$$

- $\triangle ADE$ is gelijkbenig:

$$\widehat{EDA} = \widehat{DAE} \Rightarrow 2 \cdot \widehat{EDA} = 180^\circ - \widehat{AED}$$

$$2 \cdot \widehat{EDA} = 180^\circ - 108^\circ$$

$$2 \cdot \widehat{EDA} = 72^\circ$$

$$\widehat{EDA} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

$$\widehat{D} = \widehat{ECD} = \widehat{EDA} + \widehat{ADB} + \widehat{BDC}$$

$$108^\circ = 36^\circ + \widehat{ADB} + 36^\circ$$

$$\widehat{ADB} = 108^\circ - 2 \cdot 36^\circ = 108^\circ - 72^\circ = 36^\circ$$

- b) De hoogtelijn $\widehat{D}$ op de zijde [AB].

In gelijkbenige driehoek BCD:

- som van de hoeken van een driehoek:

$$\widehat{CBD} + \widehat{DCB} + \widehat{BDC} = 180^\circ$$

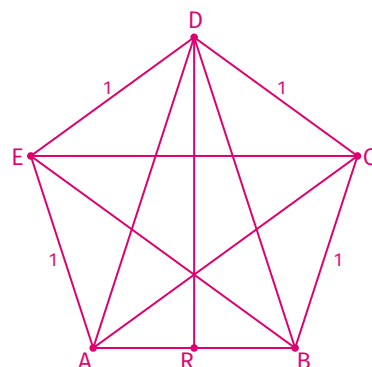
- $\triangle BCD$ is gelijkbenig:

$$\widehat{CBD} = \widehat{BDC} \Rightarrow 2 \cdot \widehat{BDC} = 180^\circ - \widehat{DCB}$$

$$2 \cdot \widehat{BDC} = 180^\circ - 108^\circ$$

$$2 \cdot \widehat{BDC} = 72^\circ$$

$$\widehat{BDC} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$



c) $\widehat{RDB} = ?$

Driehoek ABD is gelijkbenig en DR is een hoogtelijn uit de tophoek $\widehat{ADB}$.

$\Rightarrow$ de rechte DR is een bissectrice van de hoek $\widehat{ADB}$ in driehoek ABD.

$$\widehat{RDB} = \frac{1}{2}\widehat{ADB} = \frac{1}{2} \cdot 36^\circ = 18^\circ$$

d) $\widehat{DBR} = ?$

In rechthoekige driehoek BDR: $\widehat{DBR} = 90^\circ - \widehat{RDB} = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$

e) Te bewijzen: $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72^\circ$

Bewijs:

Driehoek ABD is gelijkbenig en DR is een hoogtelijn uit de tophoek $\widehat{ADB}$.

$\Rightarrow$ De rechte DR is een zwaartelijn van driehoek ABD

$$\Rightarrow R = \text{mi}[AB] \Rightarrow |BR| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}$$

$$\sin 18^\circ = \sin \widehat{RDB} = \frac{|BR|}{|BD|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{1-5} = \frac{1-\sqrt{5}}{-4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

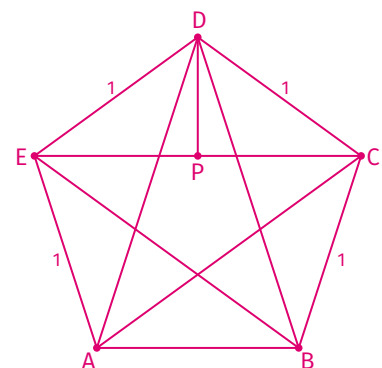
$$\cos 72^\circ = \cos \widehat{DBR} = \frac{|BR|}{|BD|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{1-5} = \frac{1-\sqrt{5}}{-4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72^\circ$$

Onderzoeksopdracht 2

a) $\widehat{EDC} = 108^\circ$ (zie onderzoeksopdracht 1 vraag a)

b) De hoogtelijn uit D op de zijde [EC]



c) $\widehat{PDC} = ?$

Driehoek ABD is gelijkbenig en DP is een hoogtelijn uit de tophoek $\widehat{ADB}$.

$\Rightarrow$ De rechte DP is een bissectrice van de hoek $\widehat{ADB}$ in driehoek CDE.

$$\widehat{PDC} = \frac{1}{2}\widehat{EDC} = \frac{1}{2} \cdot 108^\circ = 54^\circ$$

d) $\widehat{DCP} = ?$

In rechthoekige driehoek CDP: $\widehat{DCP} = 90^\circ - \widehat{PDC} = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$

e) Te bewijzen: $\sin 54^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \cos 36^\circ$

Bewijs:

Driehoek ABD is gelijkbenig en DP is een hoogtelijn uit de tophoek $\widehat{ADB}$.

$\Rightarrow$ De rechte DP is een zwaartelijn van driehoek CDE

$$\Rightarrow P = \text{mi}[CE] \Rightarrow |CP| = \frac{1}{2}|CE| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\sin 54^\circ = \sin \widehat{PDC} = \frac{|CP|}{|CD|} = \frac{|CP|}{1} = |CP| = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\cos 36^\circ = \cos \widehat{DCP} = \frac{|CP|}{|CD|} = \frac{|CP|}{1} = |CP| = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 54^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \cos 36^\circ$$

f) Te bewijzen: $\cos 54^\circ = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} = \sin 36^\circ$

Bewijs:

In rechthoekige driehoek CDP:

$$|DP| = \sqrt{|CD|^2 - |CP|^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{16}} = \sqrt{\frac{16 - 6 - 2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\cos 54^\circ = \cos \widehat{PDC} = \frac{|DP|}{|CD|} = \frac{\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}}{1} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\sin 36^\circ = \sin \widehat{DCP} = \frac{|DP|}{|CD|} = \frac{\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}}{1} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\Rightarrow \cos 54^\circ = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} = \sin 36^\circ$$



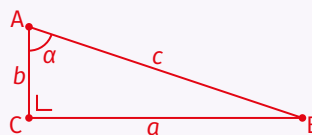
definitie

IN WOORDEN

De **secans** van een scherpe hoek α in een **rechthoekige driehoek** is de verhouding van de lengte van de schuine zijde tot de lengte van de aanliggende rechthoekszijde van die hoek.

IN SYMBOLEN

$$\sec \alpha = \frac{c}{b} \quad \text{of} \quad \sec \alpha = \frac{|AB|}{|AC|}$$



- Verklaar dat $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$.
- Bepaal $\sec \alpha$ als je weet dat $\cos \alpha = \frac{2}{7}$ en α een scherpe hoek is.
- Op de rekenmachine vind je geen knop om de secans te berekenen. Bereken met een tussenstap $\sec 50^\circ$.
- Verklaar waarom $\sec \alpha > 1$ als α een scherpe hoek is.
- Bepaal met een tussenstap de scherpe hoek α waarvoor $\sec \alpha = 1,5$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{\cos \alpha} &= \frac{1}{\frac{b}{c}} \\ &= \frac{c}{b} \\ &= \sec \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sec \alpha &= \frac{1}{\cos \alpha} \\ &= \frac{1}{\frac{2}{7}} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \sec 50^\circ = \frac{1}{\cos 50^\circ} \approx 1,55572$$

- In een rechthoekige driehoek is de schuine zijde altijd de langste zijde. De teller is dus altijd groter dan de noemer bij de secans.

$$\text{e) } \sec \alpha = 1,5$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} = 1,5$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{3}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\alpha \approx 48,18969^\circ$$

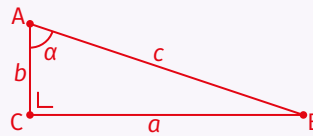


IN WOORDEN

De **cosecans** van een scherpe hoek α in een **rechthoekige driehoek** is de verhouding van de lengte van de schuine zijde tot de lengte van de overstaande rechthoekszijde van die hoek.

IN SYMBOLEN

$$\csc \alpha = \frac{c}{a} \quad \text{of} \quad \csc \alpha = \frac{|AB|}{|BC|}$$



- a) Verklaar dat $\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$.
- b) Bepaal $\csc \alpha$ als je weet dat $\sin \alpha = 0,55$ en α een scherpe hoek is.
- c) Op de rekenmachine vind je geen knop om de cosecans te berekenen. Bereken met een tussenstap $\csc 12^\circ$.
- d) Verklaar waarom $\csc \alpha > 1$ als α een scherpe hoek is.
- e) Bepaal met een tussenstap de scherpe hoek α waarvoor $\csc \alpha = 2,25$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{\sin \alpha} &= \frac{1}{\frac{a}{c}} \\ &= \frac{c}{a} \\ &= \csc \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \csc \alpha &= \frac{1}{\sin \alpha} \\ &= \frac{1}{0,55} \\ &= 1,818181... \end{aligned}$$

$$\text{c) } \csc 12^\circ = \frac{1}{\sin 12^\circ} \approx 4,80973$$

- d) In een rechthoekige driehoek is de schuine zijde altijd de langste zijde. De teller is dus altijd groter dan de noemer bij de cosecans.

$$\text{e) } \csc \alpha = 2,25$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} = 2,25$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{9}{4}$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{9}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{4}{9}\right) \approx 26,38780^\circ$$



- a) Geef de grondformule van de driehoeksmeting voor een scherpe hoek α .
- b) Geef het verband tussen de sinus, cosinus en tangens van een scherpe hoek α .

$$\text{a) } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\text{b) } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$



22

a) $\hat{A}$ is een scherpe hoek en $\sin \hat{A} = \frac{2}{3}$. Bereken $\cos \hat{A}$.b) $\hat{A}$ is een scherpe hoek en $\cos \hat{A} = \frac{4}{15}$. Bereken $\sin \hat{A}$.

a) $\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 \hat{A} = 1$$

$$\frac{4}{9} + \cos^2 \hat{A} = 1$$

$$\cos^2 \hat{A} = 1 - \frac{4}{9}$$

$$\cos^2 \hat{A} = \frac{5}{9}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

b) $\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1$

$$\sin^2 \hat{A} + \left(\frac{4}{15}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \hat{A} + \frac{16}{225} = 1$$

$$\sin^2 \hat{A} = 1 - \frac{16}{225}$$

$$\sin^2 \hat{A} = \frac{209}{225}$$

$$\sin \hat{A} = \frac{\sqrt{209}}{15}$$



23

a) $\hat{A}$ is een scherpe hoek en $\sin \hat{A} = \frac{4}{5}$ en $\cos \hat{A} = \frac{3}{5}$. Bepaal $\tan \hat{A}$.b) $\hat{A}$ is een scherpe hoek en $\sin \hat{A} = \frac{8}{17}$ en $\cos \hat{A} = \frac{15}{17}$. Bepaal $\tan \hat{A}$.

a) $\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$

$$= \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}$$

$$= \frac{4}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{3}$$

$$= \frac{4}{3}$$

b) $\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$

$$= \frac{\frac{8}{17}}{\frac{15}{17}}$$

$$= \frac{8}{\cancel{17}} \cdot \frac{\cancel{17}}{15}$$

$$= \frac{8}{15}$$



24

- a) $\hat{A}$ is een scherpe hoek en $\sin \hat{A} = \frac{3}{4}$ en $\cos \hat{A} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Bepaal $\tan \hat{A}$.
- b) $\hat{A}$ is een scherpe hoek en $\cos \hat{A} = \frac{40}{41}$ en $\tan \hat{A} = \frac{9}{40}$. Bepaal $\sin \hat{A}$.
- c) $\hat{A}$ is een scherpe hoek en $\sin \hat{A} = \frac{12}{13}$ en $\tan \hat{A} = \frac{12}{5}$. Bepaal $\cos \hat{A}$.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \tan \hat{A} &= \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}} \\
 &= \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} \\
 &= \frac{3}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\sqrt{7}} \\
 &= \frac{3}{\sqrt{7}} \\
 &= \frac{3\sqrt{7}}{7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \tan \hat{A} &= \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}} \\
 \frac{9}{40} &= \frac{\sin \hat{A}}{\frac{40}{41}} \\
 \frac{9}{\cancel{40}} \cdot \frac{\cancel{40}}{41} &= \sin \hat{A} \\
 \frac{9}{41} &= \sin \hat{A}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \tan \hat{A} &= \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}} \\
 \frac{12}{5} &= \frac{\frac{12}{13}}{\cos \hat{A}} \\
 \frac{12}{5} \cdot \cos \hat{A} &= \frac{12}{13} \\
 \cos \hat{A} &= \frac{\frac{12}{13}}{\frac{12}{5}} \\
 \cos \hat{A} &= \frac{\cancel{12}}{13} \cdot \frac{5}{\cancel{12}} \\
 \cos \hat{A} &= \frac{5}{13}
 \end{aligned}$$



- a) $\hat{A}$ is een scherpe hoek. Bereken $\sin \hat{A}$ en $\tan \hat{A}$ als je weet dat $\cos \hat{A} = \frac{1}{3}$.
- b) $\hat{A}$ is een scherpe hoek. Bereken $\cos \hat{A}$ en $\tan \hat{A}$ als je weet dat $\sin \hat{A} = \frac{11}{20}$.
- c) $\hat{A}$ is een scherpe hoek. Bereken $\sin \hat{A}$ en $\tan \hat{A}$ als je weet dat $\cos \hat{A} = \frac{4}{5}$.

a) • $\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1$

$$\sin^2 \hat{A} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \hat{A} + \frac{1}{9} = 1$$

$$\sin^2 \hat{A} = 1 - \frac{1}{9}$$

$$\sin^2 \hat{A} = \frac{8}{9}$$

$$\sin \hat{A} = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$\sin \hat{A} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

• $\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$

$$= \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{1}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{1} \cdot \frac{3}{1}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

b) • $\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1$

$$\left(\frac{11}{20}\right)^2 + \cos^2 \hat{A} = 1$$

$$\frac{121}{400} + \cos^2 \hat{A} = 1$$

$$\cos^2 \hat{A} = 1 - \frac{121}{400}$$

$$\cos^2 \hat{A} = \frac{279}{400}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{\sqrt{279}}{20}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{3\sqrt{31}}{20}$$

• $\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$

$$= \frac{\frac{11}{20}}{\frac{\sqrt{279}}{20}}$$

$$= \frac{11}{20} \cdot \frac{20}{\sqrt{279}}$$

$$= \frac{11\sqrt{279}}{279}$$

$$= \frac{33\sqrt{31}}{279}$$

$$= \frac{11\sqrt{31}}{93}$$

c) • $\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1$

$$\sin^2 \hat{A} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \hat{A} + \frac{16}{25} = 1$$

$$\sin^2 \hat{A} = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\sin^2 \hat{A} = \frac{9}{25}$$

$$\sin \hat{A} = \frac{3}{5}$$

• $\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$

$$= \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4}$$

$$= \frac{3}{4}$$



26

Verklaar waarom dit niet kan.

- a) Voor een scherpe hoek $\hat{X}$ geldt: $\tan \hat{X} = \frac{4}{3}$ en $\cos \hat{X} = \frac{1}{2}$.
- b) Voor een scherpe hoek $\hat{X}$ geldt: $\sin \hat{X} = \frac{5}{3}$ en $\cos \hat{X} = \frac{4}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \tan \hat{X} &= \frac{\sin \hat{X}}{\cos \hat{X}} \\ \frac{4}{3} &= \frac{\sin \hat{X}}{\frac{1}{2}} \\ \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{1} &= \sin \hat{X} \\ \frac{8}{3} &= \sin \hat{X} \end{aligned}$$

Dit is onmogelijk want de sinus van een scherpe hoek is altijd kleiner dan 1.

$$\begin{aligned} \text{b) } \sin \hat{X} &= \frac{5}{3} = \frac{|YZ|}{|XY|} \Rightarrow |YZ| > |XY| \leftarrow \text{onmogelijk} \\ \cos \hat{X} &= \frac{4}{3} = \frac{|XZ|}{|XY|} \Rightarrow |XZ| > |XY| \leftarrow \text{onmogelijk} \end{aligned}$$

De sinus en cosinus zijn groter dan 1. Dit kan niet want de schuine zijde in een rechthoekige driehoek is altijd de langste zijde.



27

Reken uit zonder rekenmachine.

- a) $\sin^2 55^\circ + \cos^2 55^\circ$
- b) $\frac{\cos 80^\circ \cdot \sin 80^\circ}{\tan 80^\circ} - \cos^2 80^\circ$
- c) $2 \cos^2 67^\circ + (\sin 67^\circ + \cos 67^\circ) \cdot (\sin 67^\circ - \cos 67^\circ)$
- d) $\sin^2 75^\circ + \sin^2 15^\circ$

$$\text{a) } \sin^2 55^\circ + \cos^2 55^\circ = 1$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \frac{\cos 80^\circ \cdot \sin 80^\circ}{\tan 80^\circ} - \cos^2 80^\circ \\ &= \frac{\cos 80^\circ \cdot \sin 80^\circ}{\frac{\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ}} - \cos^2 80^\circ \\ &= \frac{(\cos 80^\circ \cdot \cancel{\sin 80^\circ}) \cos 80^\circ}{\cancel{\sin 80^\circ}} - \cos^2 80^\circ \\ &= \cos^2 80^\circ - \cos^2 80^\circ \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & 2 \cos^2 67^\circ + (\sin 67^\circ + \cos 67^\circ) \cdot (\sin 67^\circ - \cos 67^\circ) \\ &= 2 \cos^2 67^\circ + (\sin^2 67^\circ - \cos^2 67^\circ) \\ &= \cos^2 67^\circ + \sin^2 67^\circ \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \sin^2 75^\circ + \sin^2 15^\circ &= \sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ \\ &= 1 \end{aligned}$$



28

Bereken zonder rekenmachine.

a) Bepaal de waarde van $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ als $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

b) Bepaal de waarde van $9 \cos^2 \alpha - 6 \sin^2 \alpha - 3\sqrt{5}$ als $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

a) • $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{16}{25} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} \bullet \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha &= \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= \frac{16}{25} - \frac{9}{25} \\ &= \frac{7}{25} \end{aligned}$$

b) • $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{5}{9}$$

$$\begin{aligned} \bullet 9 \cos^2 \alpha - 6 \sin^2 \alpha - 3\sqrt{5} &= 9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 6 \cdot \frac{5}{9} - 3\sqrt{5} \\ &= 9 \cdot \frac{4}{9} - \frac{10}{3} - 3\sqrt{5} \\ &= \frac{12}{3} - \frac{10}{3} - \frac{9\sqrt{5}}{3} \\ &= \frac{2 - 9\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$



In de driehoeksmeting bestaan er heel wat identiteiten. Je kunt die identiteiten bewijzen door gebruik te maken van eerder geziene formules. Op dit moment ken je er twee:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Om een identiteit aan te tonen vertrek je vaak vanuit één lid van de gelijkheid en probeer je de gelijkwaardige uitspraak uit het ander lid te verkrijgen.

Bewijs de identiteiten.

a) $\tan \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha$



TIP Vertrek vanuit het linkerlid en vervang $\tan \alpha$ door $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

b) $1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$

c) $\frac{\sin \alpha}{\tan \alpha} = \cos \alpha$

d) $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \tan \alpha \cdot \cos \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos \alpha \\ &= \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 1 - \sin^2 \alpha &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

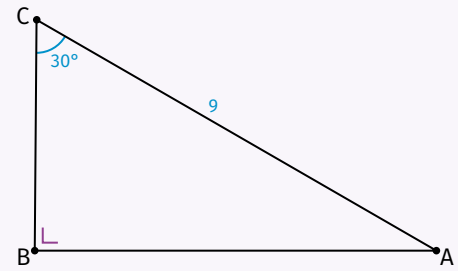
$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha} &= \frac{\sin \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} \\ &= \sin \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\ &= \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \tan^2 \alpha + 1 &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \end{aligned}$$



30

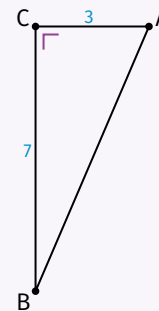
- a) Vul op basis van de figuur de gegevens in: $\sin \hat{C} = \frac{|AB|}{|AC|}$.
 b) Bepaal $|AB|$.
 c) Vul op basis van de figuur de gegevens in: $\cos \hat{C} = \frac{|BC|}{|AC|}$.
 d) Bepaal $|BC|$.
 e) Bepaal $\hat{A}$.



- a) $\sin 30^\circ = \frac{|AB|}{9}$
 b) $9 \sin 30^\circ = |AB|$
 $\frac{9}{2} = |AB|$
 c) $\cos 30^\circ = \frac{|BC|}{9}$
 d) $9 \cos 30^\circ = |BC|$
 $\frac{9\sqrt{3}}{2} = |BC|$
 e) $\hat{A} = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

31

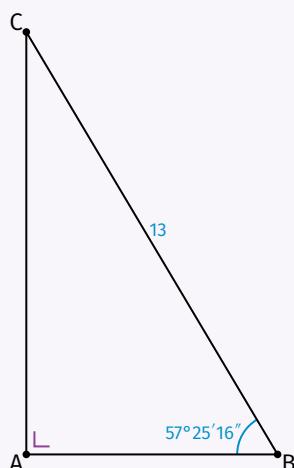
- a) Vul op basis van de figuur de gegevens in: $\tan \hat{A} = \frac{|BC|}{|AC|}$.
 b) Bepaal $\hat{A}$.
 c) Vul op basis van de figuur de gegevens in: $\tan \hat{B} = \frac{|AC|}{|BC|}$.
 d) Bepaal $\hat{B}$.
 e) Bepaal $|AB|$.



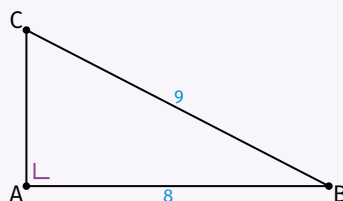
- a) $\tan \hat{A} = \frac{7}{3}$
 b) $\tan^{-1}\left(\frac{7}{3}\right) \approx 66,80141^\circ$
 c) $\tan \hat{B} = \frac{3}{7}$
 d) $\tan^{-1}\left(\frac{3}{7}\right) \approx 23,19859^\circ$
 e) $|AB|^2 = 3^2 + 7^2$
 $|AB|^2 = 9 + 49$
 $|AB|^2 = 58$
 $|AB| = \sqrt{58}$

Bepaal de lengte van de zijden en de grootte van de hoeken die nog niet gekend zijn.

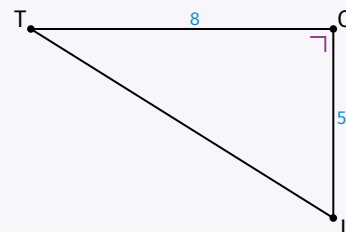
a)



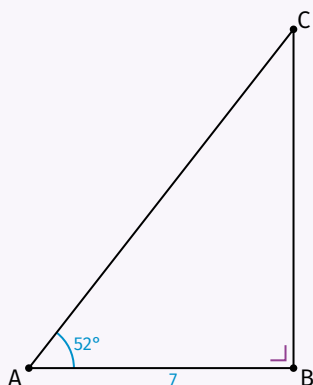
c)



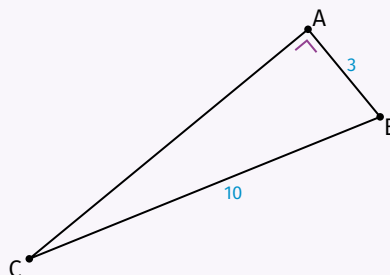
e)



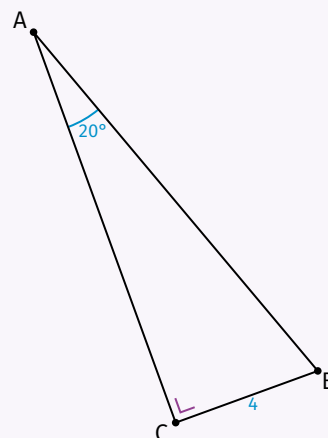
b)



d)



f)



a) • $\hat{C} = 180^\circ - 90^\circ - 57^\circ 25' 16'' = 32^\circ 34' 44''$

• $\sin 57^\circ 25' 16'' = \frac{|AC|}{13}$
 $13 \sin 57^\circ 25' 16'' = |AC|$
 $10,95 \approx |AC|$

• $\cos 57^\circ 25' 16'' = \frac{|AB|}{13}$
 $13 \cos 57^\circ 25' 16'' = |AB|$
 $7,00 \approx |AB|$

b) • $\hat{C} = 180^\circ - 90^\circ - 52^\circ = 38^\circ$

• $\cos 52^\circ = \frac{7}{|AC|}$
 $|AC| = \frac{7}{\cos 52^\circ}$
 $|AC| \approx 11,37$

• $\tan 52^\circ = \frac{|BC|}{7}$
 $7 \tan 52^\circ = |BC|$
 $8,96 \approx |BC|$

c) • $9^2 = 8^2 + |AC|^2$
 $9^2 - 8^2 = |AC|^2$
 $81 - 64 = |AC|^2$
 $17 = |AC|^2$
 $\sqrt{17} = |AC|$

• $\cos \hat{B} = \frac{8}{9}$
 $\hat{B} = \cos^{-1}\left(\frac{8}{9}\right) \approx 27,26604^\circ$

• $\sin \hat{C} = \frac{8}{9}$
 $\hat{C} = \sin^{-1}\left(\frac{8}{9}\right) \approx 62,73396^\circ$

d) • $|AC|^2 = 10^2 - 3^2$
 $|AC|^2 = 100 - 9$
 $|AC|^2 = 91$
 $|AC| = \sqrt{91}$

• $\cos \hat{B} = \frac{3}{10}$
 $\hat{B} = \cos^{-1}\left(\frac{3}{10}\right) \approx 72,54240^\circ$

• $\sin \hat{C} = \frac{3}{10}$
 $\hat{C} = \sin^{-1}\left(\frac{3}{10}\right) \approx 17,45760^\circ$

e) • $|TI|^2 = 8^2 + 5^2$
 $|TI|^2 = 64 + 25$
 $|TI|^2 = 89$
 $|TI| = \sqrt{89}$

• $\tan \hat{I} = \frac{8}{5}$
 $\hat{I} = \tan^{-1}\left(\frac{8}{5}\right) \approx 57,99462^\circ$

• $\tan \hat{T} = \frac{5}{8}$
 $\hat{T} = \tan^{-1}\left(\frac{5}{8}\right) \approx 32,00538^\circ$

f) • $\hat{B} = 180^\circ - 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$

• $\tan 20^\circ = \frac{4}{|AC|}$
 $|AC| = \frac{4}{\tan 20^\circ}$
 $|AC| \approx 10,99$

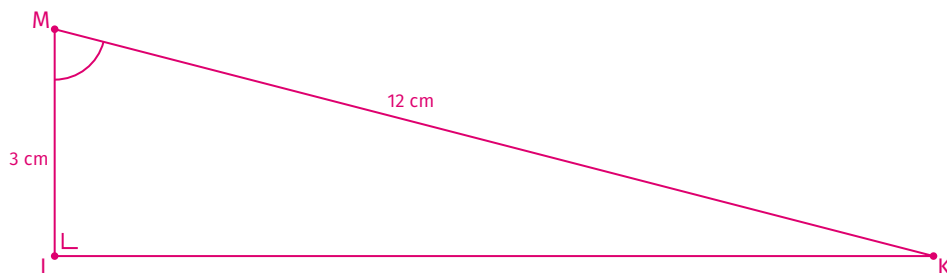
• $\sin 20^\circ = \frac{4}{|AB|}$
 $|AB| = \frac{4}{\sin 20^\circ}$
 $|AB| \approx 11,70$



33

In een rechthoekige driehoek KLM is $\hat{L} = 90^\circ$, $|KM| = 12$ cm en $|LM| = 3$ cm. Bepaal de grootte van de scherpe hoeken.

Schets:



• $\cos \hat{M} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
 $\hat{M} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \approx 75,52249^\circ$

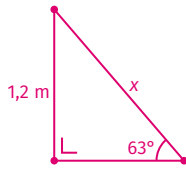
• $\sin \hat{K} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
 $\hat{K} = \sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \approx 14,47751^\circ$



34

Een boom is afgebroken op 1,2 meter hoogte. Het omgevallen deel vormt met de grond een hoek van 63° . Hoe hoog was de boom oorspronkelijk? Rond af op 0,01 m nauwkeurig.

Schets:



$$\begin{aligned}\bullet \sin 63^\circ &= \frac{1,2 \text{ m}}{x} \\ x &= \frac{1,2 \text{ m}}{\sin 63^\circ} \\ x &\approx 1,35 \text{ m}\end{aligned}$$

$$\bullet 1,2 \text{ m} + 1,35 \text{ m} = 2,55 \text{ m}$$

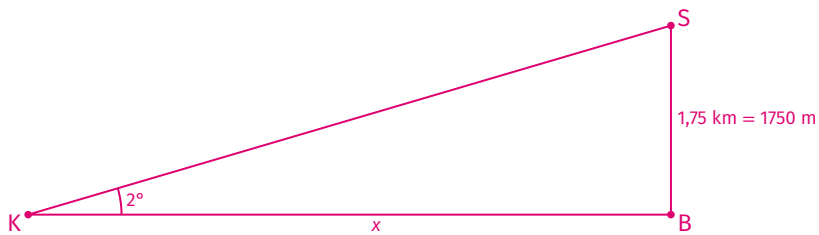
Antwoord: De boom was oorspronkelijk ongeveer 2,55 m hoog.



35

Een helikopter vliegt op 1,75 km hoogte boven Blankenberge. Hij daalt onder een hoek van 2° . Op welke afstand van de thuisbasis is de helikopter nu? Rond af op 1 m nauwkeurig.

Schets:



$$\begin{aligned}\tan 2^\circ &= \frac{1750 \text{ m}}{x} \\ x &= \frac{1750 \text{ m}}{\tan 2^\circ} \\ x &\approx 50\,113 \text{ m} \\ (x &\approx 50,113 \text{ km})\end{aligned}$$

Antwoord: De thuisbasis ligt op ongeveer 50 113 m.



Bereken de ontbrekende hoeken (op 1" nauwkeurig) en zijden (op 0,1 nauwkeurig).

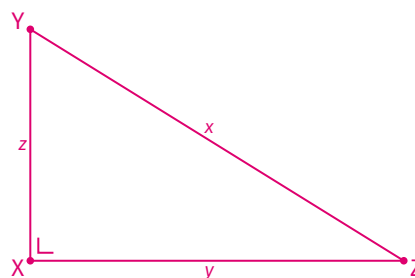
Gegeven: driehoek XYZ met $\hat{X} = 90^\circ$

	x	y	z	$\hat{Y}$	$\hat{Z}$
a)	23	15	$4\sqrt{19}$	$40^\circ 42' 21''$	$49^\circ 17' 39''$
b)	4,3	3,8	1,9	$63^\circ 00' 00''$	27°
c)	7,3	5,0	5,3	$43^\circ 15' 37''$	$46^\circ 44' 23''$

a) • $z^2 = x^2 - y^2$
 $z^2 = 23^2 - 15^2$
 $z^2 = 304$
 $z = \sqrt{304}$
 $z = 4\sqrt{19}$

• $\sin \hat{Y} = \frac{15}{23}$
 $\hat{Y} = \sin^{-1}\left(\frac{15}{23}\right) \approx 40,70571^\circ$

• $\cos \hat{Z} = \frac{15}{23}$
 $\hat{Z} = \cos^{-1}\left(\frac{15}{23}\right) \approx 49,29429^\circ$



b) • $\cos 27^\circ = \frac{3,8}{x}$
 $x = \frac{3,8}{\cos 27^\circ}$
 $x \approx 4,3$

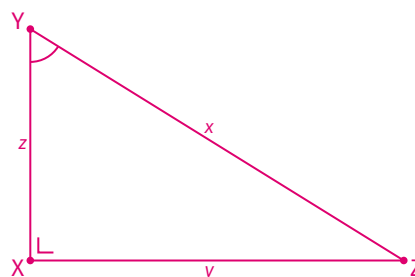
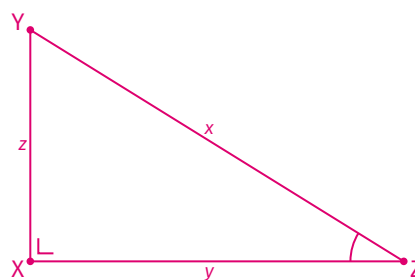
• $\tan 27^\circ = \frac{z}{3,8}$
 $\tan 27^\circ \cdot 3,8 = z$
 $1,9 \approx z$

• $\hat{Y} = 180^\circ - 90^\circ - 27^\circ$
 $\hat{Y} = 63^\circ$

c) • $\hat{Z} = 180^\circ - 90^\circ - 43^\circ 15' 37''$
 $\hat{Z} = 46^\circ 44' 23''$

• $\cos 43^\circ 15' 37'' = \frac{5,3}{x}$
 $x = \frac{5,3}{\cos 43^\circ 15' 37''}$
 $x \approx 7,3$

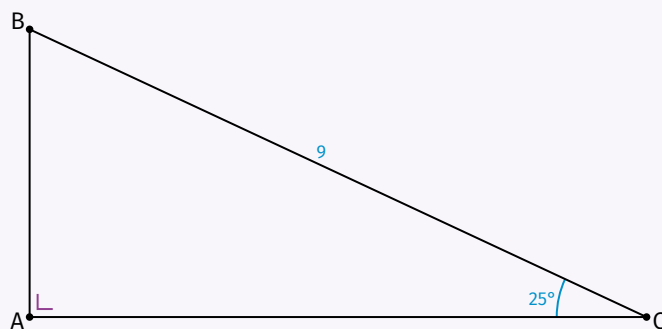
• $\tan 43^\circ 15' 37'' = \frac{y}{5,3}$
 $\tan 43^\circ 15' 37'' \cdot 5,3 = y$
 $5,0 \approx y$



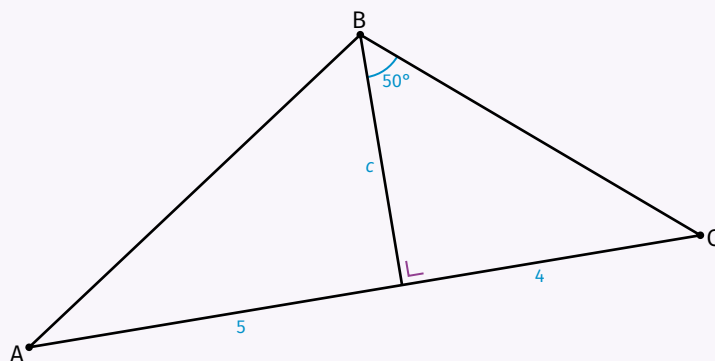
37

Bepaal de omtrek van de gegeven driehoek ABC. Rond je resultaat af op 0,01 nauwkeurig.

a)



b)



$$\begin{aligned}
 \text{a) } \bullet \sin 25^\circ &= \frac{|AB|}{9} \\
 9 \sin 25^\circ &= |AB| \\
 3,80 &\approx |AB| \\
 \bullet \cos 25^\circ &= \frac{|AC|}{9} \\
 9 \cos 25^\circ &= |AC| \\
 8,16 &\approx |AC| \\
 \bullet p_{\triangle ABC} &\approx 9 + 3,80 + 8,16 \\
 &\approx 20,96
 \end{aligned}$$

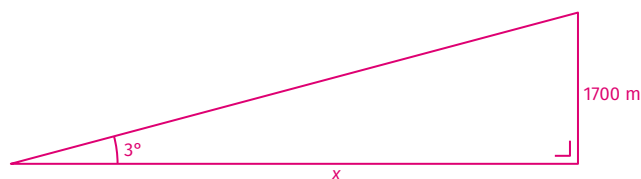
$$\begin{aligned}
 \text{b) } \bullet \sin 50^\circ &= \frac{4}{|BC|} \\
 |BC| &= \frac{4}{\sin 50^\circ} \\
 |BC| &\approx 5,22 \\
 \bullet \tan 50^\circ &= \frac{4}{c} \\
 c &= \frac{4}{\tan 50^\circ} \\
 c &\approx 3,36 \\
 \bullet |AB|^2 &= 3,36^2 + 5^2 \\
 |AB| &\approx 6,02 \\
 \bullet p_{\triangle ABC} &\approx 9 + 5,22 + 6,02 \\
 &\approx 20,24
 \end{aligned}$$



38

Een vliegtuig bevindt zich op een hoogte van 1700 m en daalt richting de luchthaven onder een hoek van 3° . Hoe ver bevindt het vliegtuig zich van de luchthaven? Werk op 0,01 m nauwkeurig.

Schets:



$$\tan 3^\circ = \frac{1700 \text{ m}}{x}$$

$$x = \frac{1700 \text{ m}}{\tan 3^\circ}$$

$$x \approx 32\,437,93 \text{ m}$$

Antwoord: Het vliegtuig bevindt zich op ongeveer 32 437,93 m van de luchthaven.

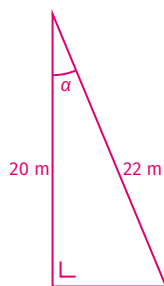


39

Castellane staat bekend om zijn canyons. Phebe neemt deel aan een canyoning. Ze staat op 20 m hoogte en bij haar sprong legt ze 22 m af tot ze in het water belandt. Onder welke hoek springt ze naar beneden?



Schets:



$$\cos \alpha = \frac{20}{22}$$

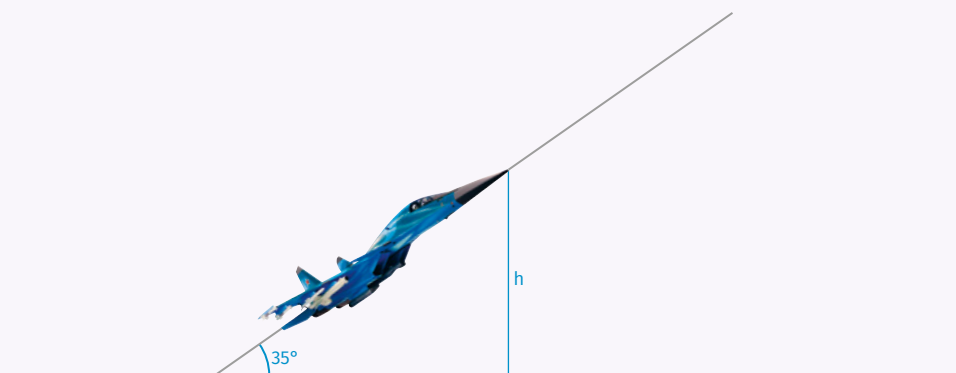
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{20}{22}\right) \approx 24,61998^\circ$$

Antwoord: Ze springt onder een hoek van $24,61998^\circ$.



40

Een straaljager vliegt met een snelheid van $500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ($= 1800 \frac{\text{km}}{\text{h}}$). De straaljager vliegt met een constante hoek van 35° t.o.v. de horizontale richting. Met welke snelheid neemt de hoogte van de straaljager toe? Benader je uitkomst op $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nauwkeurig.



$$\sin 35^\circ = \frac{h}{500}$$

$$\sin 35^\circ \cdot 500 = h$$

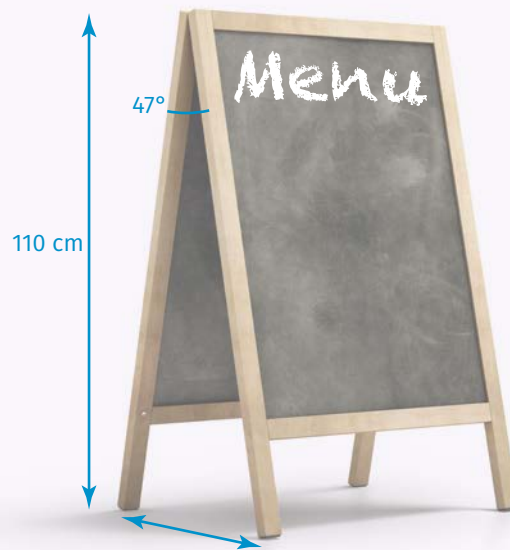
$$286,78822 \approx h$$

Antwoord: De hoogte neemt ongeveer toe met een snelheid van $287 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

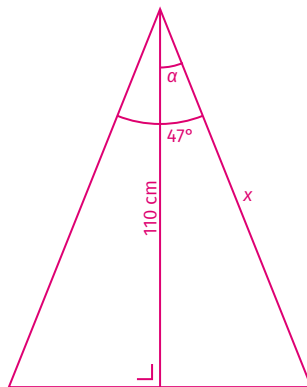


41

Een restaurant zet dagelijks een reclamebord buiten met daarop het dagmenu. Hoe hoog is het bord als je het bord volledig dichtklapt? Rond af op 0,01 cm.



schets:

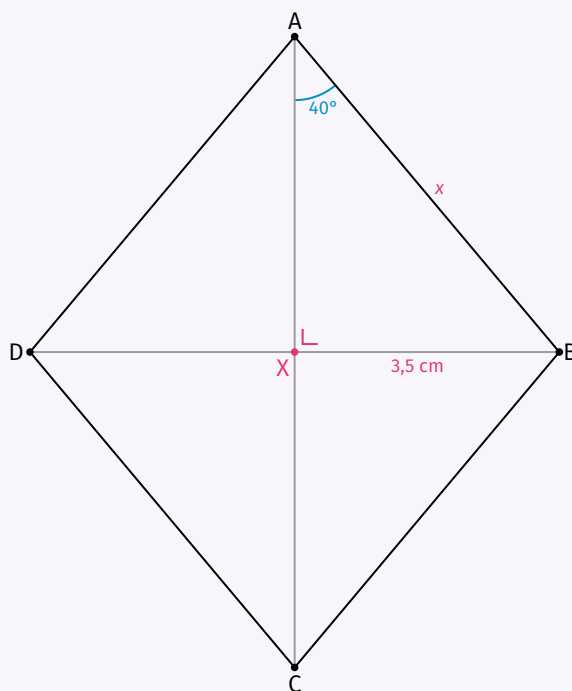


- $\alpha = \frac{1}{2} \cdot 47^\circ$
 $\alpha = 23,5^\circ$
- $\cos 23,5^\circ = \frac{110 \text{ cm}}{x}$
 $x = \frac{110 \text{ cm}}{\cos 23,5^\circ}$
 $x \approx 119,95 \text{ cm}$

Antwoord: Het bord is ongeveer 119,95 cm hoog als het is dichtgeklapt.



Bepaal de omtrek van deze ruit waarbij $|DB| = 7$ cm. Werk op 0,1 mm nauwkeurig.



- $|BX| = \frac{1}{2} |BD|$
 $= \frac{1}{2} \cdot 7$ cm
 $= 3,5$ cm
- $\sin 40^\circ = \frac{3,5 \text{ cm}}{x}$
 $x = \frac{3,5 \text{ cm}}{\sin 40^\circ}$
 $x \approx 5,45$ cm
- $p_{ABCD} \approx 4 \cdot 5,45$ cm
 $\approx 21,78$ cm

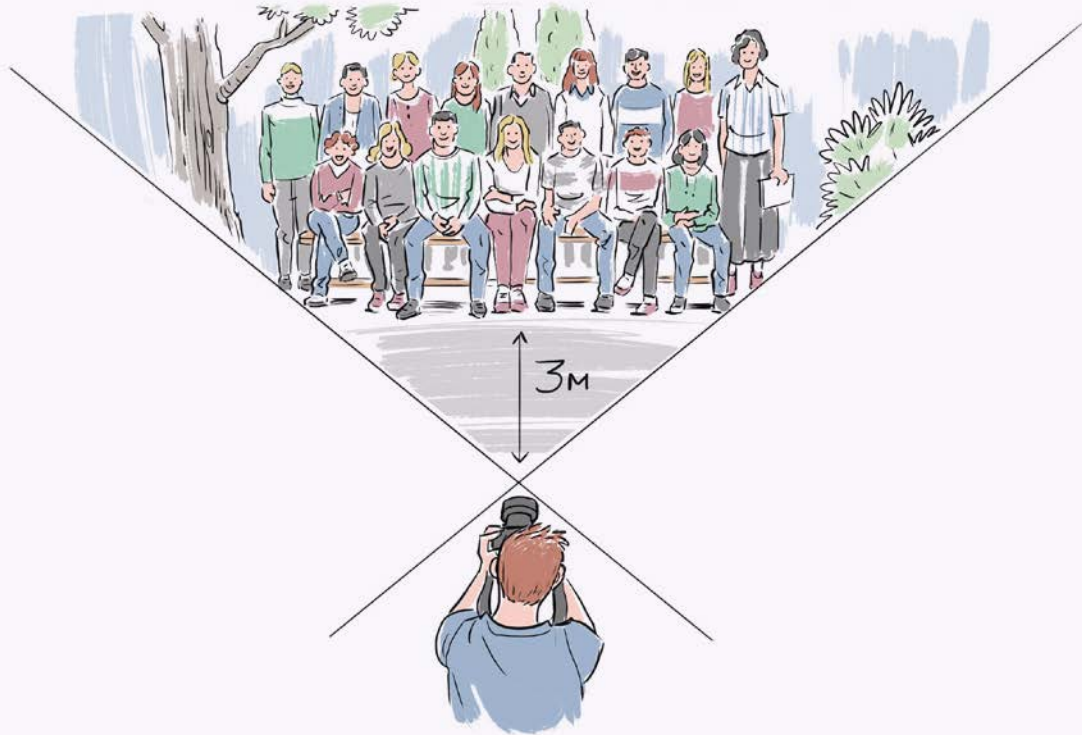
Antwoord: De omtrek van de ruit is ongeveer 217,8 mm.



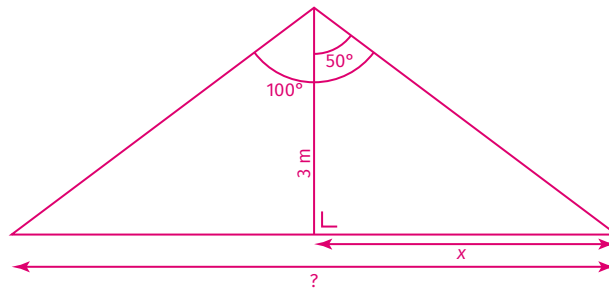
43

Een fotograaf staat vlak voor het midden van een klasgroep op 3 meter afstand. Voor de klasfoto staan ze in twee rijen. Hij ziet de uiterste leerlingen van de klas onder een hoek van 100° .

- Hoe breed is de klasgroep? Werk op 0,01 m nauwkeurig.
- Schat hoeveel leerlingen in de klas zitten.



a)



$$\begin{aligned} \bullet \quad \tan 50^\circ &= \frac{x}{3} \\ 3 \tan 50^\circ &= x \\ 3,58 &\approx x \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \text{breedte klasgroep} \approx 3,58 \text{ m} \cdot 2 \approx 7,16 \text{ m}$$

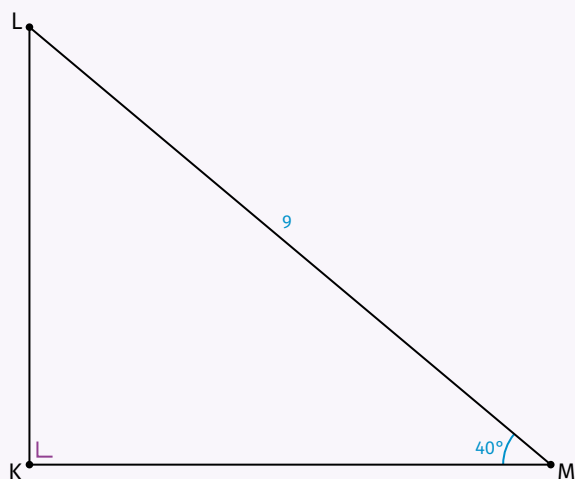
$$\begin{aligned} \text{b) Stel 70 cm per leerling: } & \frac{700 \text{ cm}}{70 \text{ cm}} \cdot 2 = 20 \\ \Rightarrow & 19 \text{ leerlingen en 1 leerkracht.} \end{aligned}$$

Antwoord: Er zitten ongeveer 19 leerlingen in de klas.



44

Bepaal de oppervlakte van de gegeven driehoek. Werk op 0,01 nauwkeurig.

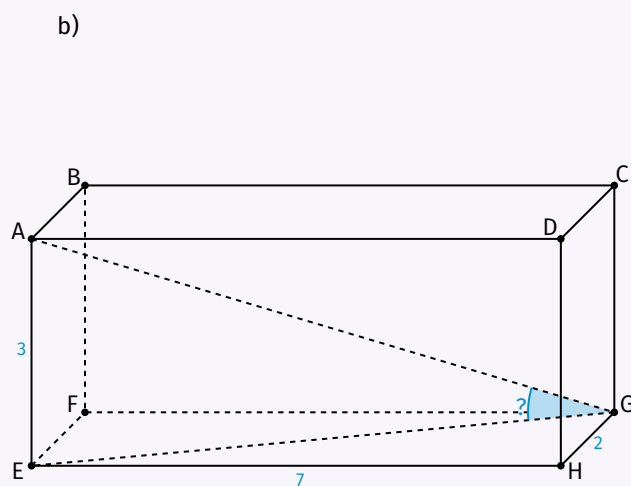
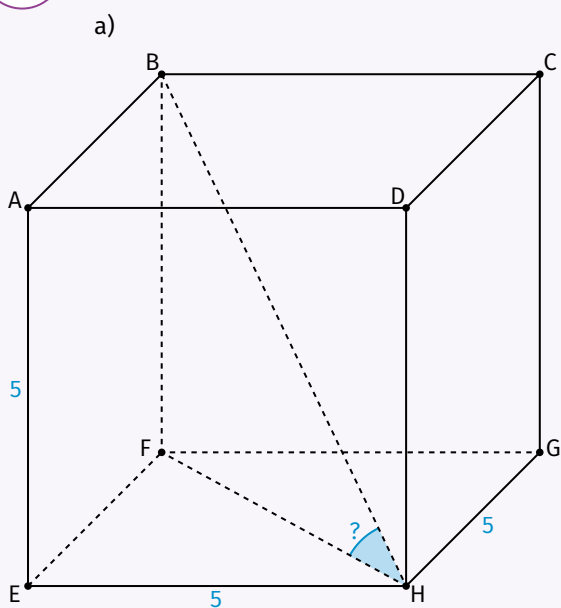


$\cos 40^\circ = \frac{ KM }{9}$ $9 \cos 40^\circ = KM$	$\sin 40^\circ = \frac{ KL }{9}$ $9 \sin 40^\circ = KL$	$A_{\Delta KLM} = \frac{9 \cdot \cos 40^\circ \cdot 9 \cdot \sin 40^\circ}{2}$ $\approx 19,94$
--	--	---



45

Bereken de aangeduide hoek.



a) • $|FH|$ in ΔFHE :

$$|FH|^2 = |EF|^2 + |EH|^2$$

$$|FH|^2 = 5^2 + 5^2$$

$$|FH|^2 = 50$$

$$|FH| = \sqrt{50}$$

- $\tan \hat{H} = \frac{5}{\sqrt{50}}$

$$\hat{H} = \tan^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{50}}\right) \approx 35,26439^\circ$$

b) • $|EG|$ in ΔEGH :

$$|EG|^2 = 7^2 + 2^2$$

$$|EG|^2 = 53$$

$$|EG| = \sqrt{53}$$

- $\tan \hat{G} = \frac{3}{\sqrt{53}}$

$$\hat{G} = \tan^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{53}}\right) \approx 22,39566^\circ$$

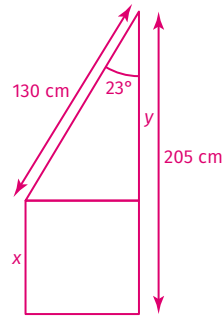


46

In rust bevindt het midden van het stoeltje zich 75 cm boven de grond. Papa maakt een foto terwijl Lars aan het schommelen is. Bij de voorwaartse schommelbeweging wordt een hoek van 23° gemaakt. Maak een schets van deze situatie. Hoe hoog boven de grond bevond het midden van het stoeltje zich op dat moment? Werk op 0,1 cm nauwkeurig.



Schets:



- $\cos 23^\circ = \frac{y}{130}$
 $130 \text{ cm} \cdot \cos 23^\circ = y$
- $x = 205 - 130 \cdot \cos 23^\circ$
 $x \approx 85,3$

Antwoord: Het stoeltje bevond zich toen ongeveer 85,3 cm boven de grond.

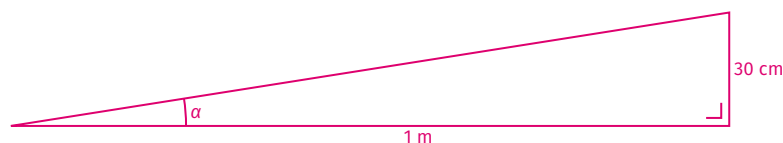


47

Een schilderes verft het Nando-logo op een deur. Onder welke hoek ziet zij het logo als haar ogen op gelijke hoogte staan met het onderste deel van het logo en zij zich op 1 m van de deur bevindt?



Schets:



$$\tan \alpha = \frac{0,3}{1}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{0,3}{1}\right) \approx 16,69924^\circ$$

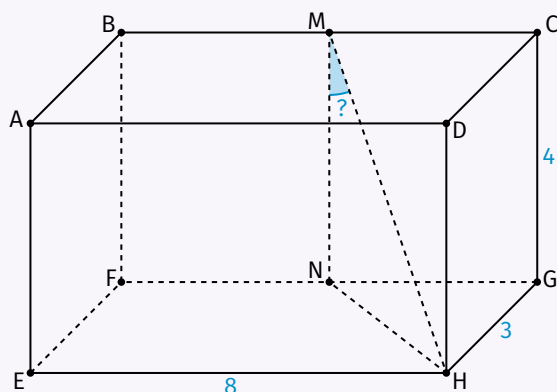
Antwoord: Ze ziet het logo onder een hoek van ongeveer 17° .



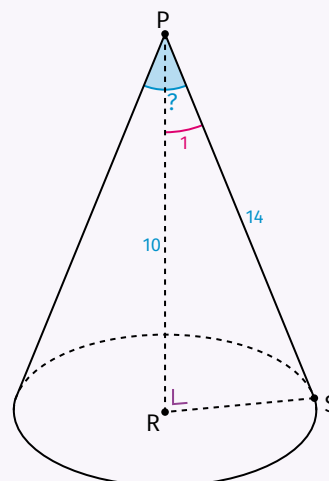
48

Bereken de aangeduide hoek.

- a) N is het midden van [FG] en
M is het midden van [BC].



b)



- a) • $|NH|$ in $\triangle NGH$

$$|NH|^2 = 3^2 + 4^2$$

$$|NH|^2 = 25$$

$$|NH| = 5$$

$$\bullet \tan \hat{M} = \frac{5}{4}$$

$$\hat{M} = \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) \approx 51,34019^\circ$$

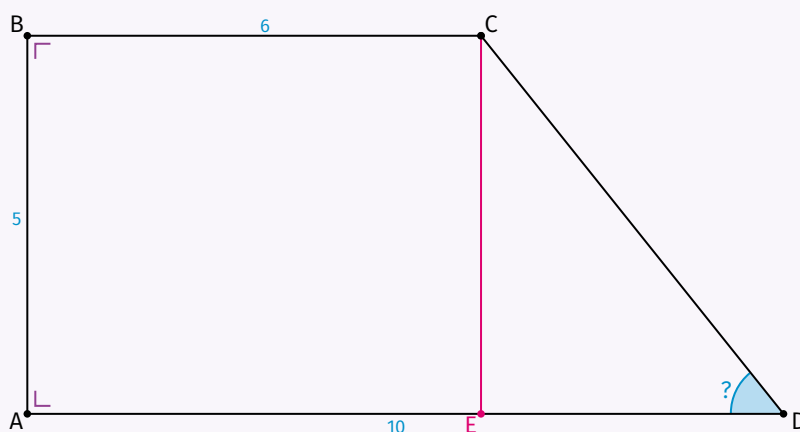
- b) • $\cos \hat{P}_1 = \frac{10}{14}$

$$\bullet \hat{P} = 2 \cdot \hat{P}_1 = 2 \cdot \cos^{-1}\left(\frac{10}{14}\right) \approx 88,83062^\circ$$



49

Bereken $\hat{D}$.



$$\bullet |DE| = 10 - 6 = 4$$

$$\bullet |CE| = |BA| = 5$$

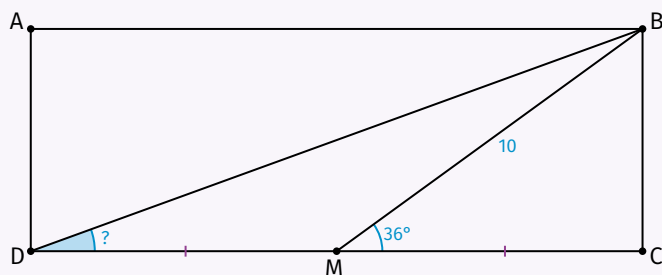
$$\bullet \tan \hat{D} = \frac{5}{4}$$

$$\hat{D} = \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) \approx 51,34019^\circ$$



50

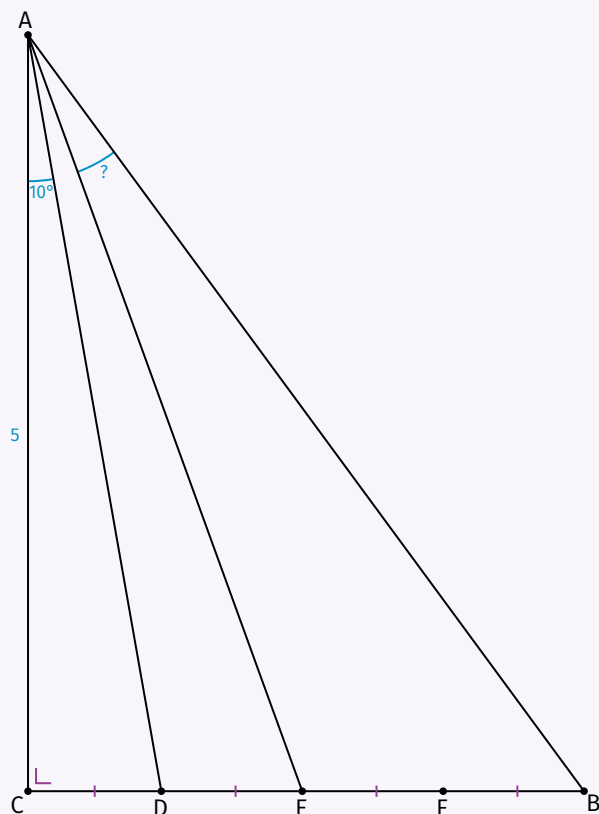
ABCD is een rechthoek. Bereken de aangeduide hoek $\hat{D}$.



- $|BC|$ in $\triangle BCM$:
 $\sin 36^\circ = \frac{|BC|}{10}$
 $10 \sin 36^\circ = |BC|$
- $|MC|$ in $\triangle BCM$:
 $\cos 36^\circ = \frac{|MC|}{10}$
 $10 \cos 36^\circ = |MC|$
 $\Rightarrow |DC| = 2 \cdot |MC| = 20 \cdot \cos 36^\circ$
- $\tan \hat{D} = \frac{|BC|}{|MC|} = \frac{10 \cdot \sin 36^\circ}{20 \cdot \cos 36^\circ}$
 $\hat{D} = \tan^{-1} \left(\frac{10 \cdot \sin 36^\circ}{20 \cdot \cos 36^\circ} \right) \approx 19,96463^\circ$



51

Bereken de hoek $\widehat{EAB}$.

- $|CD|$ in $\triangle ADC$:

$$\tan 10^\circ = \frac{|CD|}{5}$$

$$\tan 10^\circ \cdot 5 = |CD|$$

$$0,88 \approx |CD|$$

- $|CD| = |DE| \Rightarrow |CE| = 1,76$

- $\widehat{CAE}$ in $\triangle CAE$:

$$\tan \widehat{A} \approx \frac{1,76}{5}$$

$$\widehat{A} \approx \tan^{-1}\left(\frac{1,76}{5}\right) \approx 19,39207^\circ$$

- $\widehat{CAB}$ in $\triangle CAB$:

$$\tan \widehat{A} \approx \frac{4 \cdot 0,88}{5}$$

$$\widehat{A} \approx \tan^{-1}\left(\frac{4 \cdot 0,88}{5}\right) \approx 35,14555^\circ$$

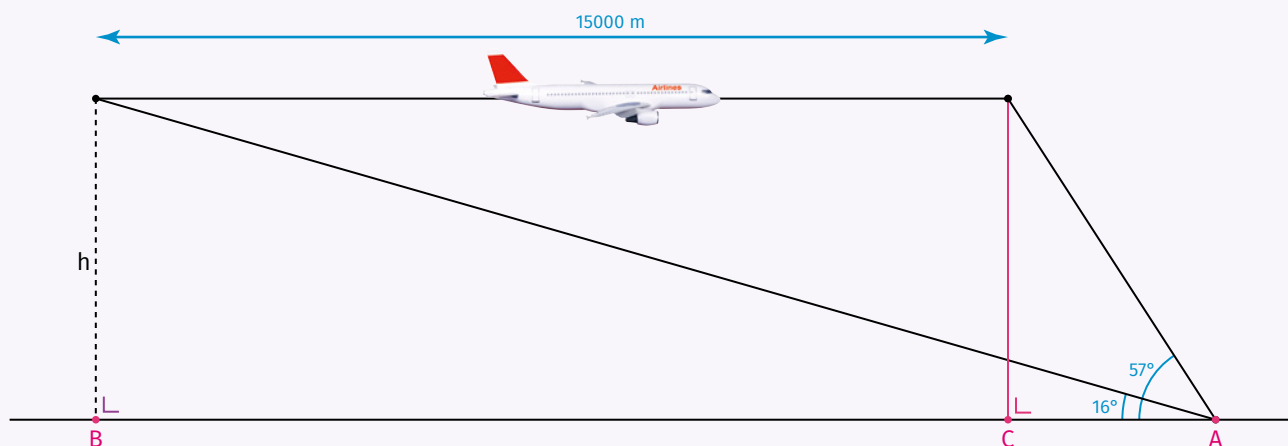
- $\widehat{EAB} \approx 35,14555^\circ - 19,39207^\circ$

$$\approx 15,75348^\circ$$



52

Een vliegtuig nadert je huis. De snelheid van het vliegtuig is 900 km/h. Je ziet het vliegtuig vanuit een hoek van 16° met de horizontale. Eén minuut later bedraagt deze hoek 57° .



- Toon aan dat de afgelegde weg van het vliegtuig 15 000 m per minuut is.
- Bepaal de hoogte waarop het vliegtuig zich bevindt. Rond af op 0,01 m nauwkeurig.

$$900 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 250 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \Delta x &= v \cdot \Delta t \\ \Delta x &= 250 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 60 \text{ s} \\ \Delta x &= 15\,000 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \bullet \tan 16^\circ &= \frac{h}{|AB|} & \bullet \tan 57^\circ &= \frac{h}{|AC|} \\ \tan 16^\circ \cdot |AB| &= h & \tan 57^\circ \cdot |AC| &= h \end{aligned} \quad \text{en}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \tan 16^\circ \cdot |AB| &= \tan 57^\circ \cdot |AC| \\ \tan 16^\circ \cdot |AB| &= \tan 57^\circ \cdot (|AB| - 15\,000) \\ \tan 16^\circ \cdot |AB| &= \tan 57^\circ \cdot |AB| - \tan 57^\circ \cdot 15\,000 \\ \tan 16^\circ \cdot |AB| - \tan 57^\circ \cdot |AB| &= -\tan 57^\circ \cdot 15\,000 \\ (\tan 16^\circ - \tan 57^\circ) \cdot |AB| &= -\tan 57^\circ \cdot 15\,000 \\ |AB| &= \frac{-\tan 57^\circ \cdot 15\,000}{\tan 16^\circ - \tan 57^\circ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad h &= \tan 16^\circ \cdot |AB| \\ &= \tan 16^\circ \cdot \frac{-\tan 57^\circ \cdot 15\,000}{\tan 16^\circ - \tan 57^\circ} \\ &\approx 5285,40 \end{aligned}$$

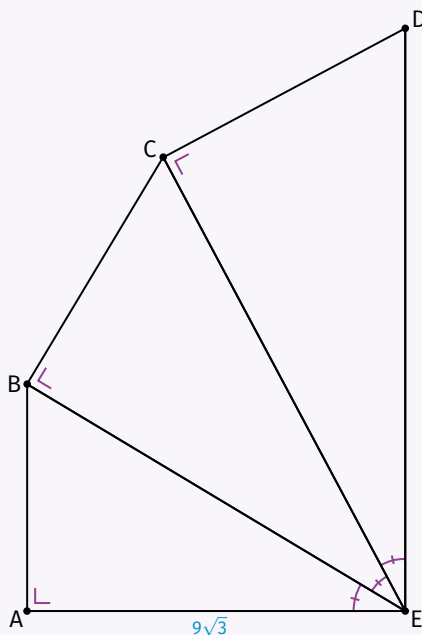
Antwoord: Het vliegtuig bevindt zich op ongeveer 5285,4 m hoogte.



54

In de vijfhoek ABCDE is $\hat{E} = 90^\circ$.

- Verklaar waarom de drie driehoeken gelijkvormig zijn.
- Bereken $|ED|$. Rond af op 2 decimalen.



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 90^\circ \quad (\text{gegeven}) \\ \hat{AEB} = \hat{BEC} = \hat{CED} \quad (\text{gegeven}) \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle ABE \sim \triangle BCE \sim \triangle CDE$$

$$\text{b) } \bullet \hat{AEB} = \hat{BEC} = \hat{CED} = \frac{90^\circ}{3} = 30^\circ$$

- $|BE|$ in $\triangle ABE$

$$\cos 30^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{|BE|}$$

$$|BE| = \frac{9\sqrt{3}}{\cos 30^\circ}$$

$$|BE| = 18$$

- $|CE|$ in $\triangle BCE$

$$\cos 30^\circ = \frac{18}{|CE|}$$

$$|CE| = \frac{18}{\cos 30^\circ}$$

$$|CE| \approx 20,78$$

- $|DE|$ in $\triangle CDE$

$$\cos 30^\circ = \frac{20,78}{|DE|}$$

$$|DE| = \frac{20,78}{\cos 30^\circ}$$

$$|DE| \approx 23,99$$



